KOLOKWIUM nr 59, 16.05.2016, godz. 16.15-17.00

Zadanie **66.** **(17 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<5$, że $\int\limits_a^5 \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\int\limits_a^5 \frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x\Big|_{x=a}^{5}=\operatorname{arctg} 5-\operatorname{arctg} a\,,$$

pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie

$$\operatorname{arctg} 5-\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 1\,,$$

czyli

$$\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg} 5-\operatorname{arctg} 1\,.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg} 5-\operatorname{arctg} 1=\operatorname{arctg} 5+\operatorname{arctg}(-1)=\arg(1+5i)+\arg(1-i)=$$

$$=\arg((1+5i)\cdot(1-i))+2k\pi=\arg(6+4i)+2k\pi=\arg\left(1+\frac{2}{3}i\right)+2k\pi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2k\pi\,,$$

skąd po uwzględnieniu nierówności

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{2}$$

i

$$0<\operatorname{arctg} 5-\operatorname{arctg} 1<\frac{\pi}{2}$$

wynika $k=0$ oraz $a=2/3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=2/3$.

Zadanie **67.** **(27 punktów)** Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ sprowadzając wynik do postaci $\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x}$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:
Przyjmijmy

$$z = \cos x + i\sin x\,.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n = \cos nx + i\sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx = \mathrm{Re}\, z^n\,.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, z^n}{3^n} = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \mathrm{Re} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \mathrm{Re} \frac{3}{3-z} =$$

$$= \mathrm{Re} \frac{3}{3-\cos x - i\sin x} = \mathrm{Re} \frac{3\cdot(3-\cos x + i\sin x)}{(3-\cos x)^2+\sin^2 x} = \frac{3\cdot(3-\cos x)}{9-6\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x} =$$

$$= \frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa $\frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}$.