KOLOKWIUM nr 60, 6.06.2016, godz. 16.15-17.00

Zadanie **68.** **(20 punktów)**

Dany jest szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\cos n^8 x}{n^{60}}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m=7$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k\leqslant 7$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{\text{jakiśsinus}\, n^8 x}{n^{60-8k}}\,,$$

gdzie $f^{(0)}=f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm\sin$, $\pm\cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{60-8k}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{60-8\cdot 7}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}<+\infty\,,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 7-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(8)}(x)=n^4\cos n^8 x\,,$$

co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} n^4$. Zatem szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(8)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=8$ nie spełnia warunków zadania.

Zadanie **69.** **(27 punktów)** Udowodnić nierówności:

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^3} < 0{,}0000495\,, \qquad \textbf{(5 punktów)}$$

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^3} > 0{,}0000485\,, \qquad \textbf{(7 punktów)}$$

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^3} > 0{,}000049\,. \qquad \textbf{(15 punktów)}$$

Rozwiązanie:
Rozważmy całkę oznaczoną

$$\int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{x=100}^{1000} = -\frac{1}{2\cdot 10^6} + \frac{1}{2\cdot 10^4} = 0{,}0000495$$

oraz podział jej przedziału całkowania $[100, 1000]$ na 900 przedziałów długości 1.

1° Ponieważ funkcja podcałkowa jest malejąca, zachodzi nierówność

$$0{,}0000495 = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^3} > \sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^3}\,, \qquad \text{(suma wartości w prawych końcach)}$$

co stanowi nierówność za 5 punktów.

2° Z tego samego powodu zachodzi też nierówność

$$0{,}0000495 = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^3} < \sum_{n=100}^{999} \frac{1}{n^3}\,, \qquad \text{(suma wartości w lewych końcach)}$$

skąd otrzymujemy

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^3} > \sum_{n=101}^{999} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=100}^{999} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{10^6} > 0{,}0000495 - \frac{1}{10^6} = 0{,}0000485\,,$$

co kończy dowód nierówności za 7 punktów.

3° Ponieważ funkcja podcałkowa jest wypukła, zachodzi nierówność wynikająca z metody trapezów:

$$0{,}0000495 = \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x^3} < \sum_{n=101}^{999} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2\cdot 10^6} + \frac{1}{2\cdot 10^9}\,,$$

skąd

$$\sum_{n=101}^{1000} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=101}^{999} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{10^9} > 0{,}0000495 - \frac{1}{2\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 10^9} + \frac{1}{10^9} =$$

$$= 0{,}0000495 - \frac{1}{2\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 10^9} = 0{,}0000495 - 0{,}0000005 + 0{,}0000000005 =$$

$$= 0{,}0000490005 > 0{,}000049\,,$$

co daje nierówność za 15 punktów.