KOLOKWIUM nr 61, 13.06.2016, godz. 15.15-17.30

Zadanie **70.** **(20 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że $\int\limits_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\int\limits_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x\Big|_{x=a}^{7}=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} a\,,$$

pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie

$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 1\,,$$

czyli

$$\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 1\,.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 1=\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg}(-1)=\arg(1+7i)+\arg(1-i)=$$

$$=\arg((1+7i)\cdot(1-i))+2k\pi=\arg(8+6i)+2k\pi=\arg\left(1+\frac{3}{4}i\right)+2k\pi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi\,,$$

skąd po uwzględnieniu nierówności

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{3}{3}<\frac{\pi}{2}$$

i

$$0<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 1<\frac{\pi}{2}$$

wynika $k=0$ oraz $a=3/4$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=3/4$.

Zadanie **71.** **(20 punktów)**

Dane są takie ciągi (a_n), (b_n), (c_n) i (d_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{12} = 1$.

Dowieść, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n \leqslant 1$.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n^2, a_n^2, a_n^2, a_n^2, a_n^2, a_n^2, b_n^4, b_n^4, b_n^4, c_n^6, c_n^6 i d_n^{12} otrzymujemy

$$\sqrt[12]{a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot a_n^2 \cdot b_n^4 \cdot b_n^4 \cdot b_n^4 \cdot c_n^6 \cdot c_n^6 \cdot d_n^{12}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + a_n^2 + b_n^4 + b_n^4 + b_n^4 + c_n^6 + c_n^6 + d_n^{12}}{12},$$

czyli

$$a_n b_n c_n d_n \leqslant \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^4}{4} + \frac{c_n^6}{6} + \frac{d_n^{12}}{12}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^4}{4} + \frac{c_n^6}{6} + \frac{d_n^{12}}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 + \frac{1}{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{12} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **72. (20 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^5$ są zbieżne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^7$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie:

Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r} = \frac{b_r}{\sqrt[7]{m}} \quad \text{dla} \quad m \in \mathbb{N}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, k\,,$$

gdzie liczby $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ spełniają warunki

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_k = b_1^5+b_2^5+b_3^5+\ldots+b_k^5 = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

oraz

$$b_1^7+b_2^7+b_3^7+\ldots+b_k^7 \neq 0\,. \qquad (\heartsuit)$$

Pozostaje więc skonstruować lub wskazać taki układ liczb $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$.

Konstrukcja:

Załóżmy, że układ liczb $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ składa się z x jedynek, y dwójek i z trójek, przy czym dopuszczamy ujemne wartości x, y i z oznaczające odpowiednio $-x$ liczb -1, $-y$ liczb -2, $-z$ liczb -3. Wówczas równości $(\diamondsuit)$ przyjmują postać

$$x+2y+3z = x+32y+243z = 0\,,$$

skąd otrzymujemy $30y+240z=0$, możemy więc przyjąć $z=1$ oraz $y=-8$. To prowadzi do $x=13$. Zauważmy, że przy tym

$$x+2^7y+3^7z = 13-2^7\cdot 8+3^7\cdot 1 = 13-1024+3^7 = -1011+2187 = 1176\,,$$

skąd wynika warunek $(\heartsuit)$. W konsekwencji możemy przyjąć $k=22$ oraz

$$b_1=b_2=b_3=\ldots=b_{12}=b_{13}=1, \qquad b_{14}=b_{15}=\ldots=b_{20}=b_{21}=-2, \qquad b_{22}=3\,.$$

Zadanie **73. (20 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\, dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:
Przyjmiemy $\mathbf{n=6}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[11]{x^7+1}\,,$$

czyli

$$t^{11}=x^7+1$$

oraz formalnie

$$11t^{10}\,dt=7x^6\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^6 \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\, dx=\frac{1}{7}\int \sqrt[11]{x^7+1}\cdot 7x^6\, dx=\frac{1}{7}\int t\cdot 11t^{10}\, dt=\frac{11}{7}\int t^{11}\, dt=\frac{11}{7}\cdot\frac{t^{12}}{12}+C=$$

$$=\frac{11\cdot t^{12}}{84}+C=\mathbf{\frac{11}{84}\cdot\left(x^7+1\right)^{12/11}+C\,.}$$

Zadanie **74. (dużo punktów)**

Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości calek:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\,dx=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}}\,dx=\frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\cos nx\,dx=\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\sin nx\,dx=\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\,.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A=e^{2\pi\sqrt{2}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B=e^{2\pi\sqrt{2}}+1\,.$$

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji f okresowej z okresem 2π i określonej na przedziale $[0,2\pi)$ wzorem

$$f(x)=\begin{cases} e^{x\sqrt{2}} & \text{dla} \quad x\in(0,2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\,,$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji f, gdyż f ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Sposób I

Porównując wartość funkcji f w punkcie $x=0$ z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2}=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2}-\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B-A}{4A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

Sposób II

Korzystając z równości Parsevala:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\right)^2+\left(\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\right)^2\right)\,,$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}+1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\sqrt{2}}-\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B-A}{4A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$