ANALIZA 2B, KOLOKWIUM nr 61, 13.06.2016, godz. 15.15-17.30

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **70.** **(20 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że $\int\limits_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$.

Zadanie **71.** **(20 punktów)**

Dane są takie ciągi (a_n), (b_n), (c_n) i (d_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^4=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^6=\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^{12}=1$.

Dowieść, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n \leqslant 1$.

Zadanie **72.** **(20 punktów)**

Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^5$ są zbieżne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^7$ jest rozbieżny.

Zadanie **73.** **(20 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\, dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n.

Zadanie **74.** **(dużo punktów)**

Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości calek:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\, dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}}\, dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\cos nx\, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\sin nx\, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\,.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A=e^{2\pi\sqrt{2}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B=e^{2\pi\sqrt{2}}+1\,.$$