KOLOKWIUM nr 6, 7.04.2016, godz. 8.15-9.00

Zadanie **8.** **(10 punktów)** Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt{x}$, czyli $x=t^2$ przy założeniu $t\geqslant 0$, skąd dostajemy formalny wzór $dx=2t\,dt$. Przy tym podstawieniu przedziałowi całkowania $x\in(0,\infty)$ odpowiada przedział $t\in(0,\infty)$.

Otrzymujemy:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}=\int\limits_0^\infty \frac{2t\,dt}{t+t^3}=2\cdot\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=2\cdot \operatorname{arctg} t\Big|_{t=0}^{\infty}=$$

$$=2\cdot\left(\lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg} t\right)-2\cdot\operatorname{arctg} 0=2\cdot\frac{\pi}{2}-0=\pi\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość π.

Zadanie **9.** **(10 punktów)** Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_{6}^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x}\,dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{3x+2}{x^3-4x} = \frac{3x+2}{(x-2)\cdot x\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}\,,$$

$$3x+2 = A\cdot x\cdot(x+2) + B\cdot(x-2)\cdot(x+2) + C\cdot(x-2)\cdot x\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\heartsuit$) kolejno $x=2$, $x=0$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$8 = 8A, \quad \text{skąd} \quad A = 1\,,$$

$$2 = -4B, \quad \text{skąd} \quad B = -\frac{1}{2}\,,$$

$$-4 = 8C, \quad \text{skąd} \quad C = -\frac{1}{2}\,.$$

Wobec tego

$$\int\limits_{6}^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x}\,dx = \int\limits_{6}^{\infty} \frac{1}{x-2} - \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2}\Bigg|_{x=6}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\ln|x-2| - \frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln|x+2|}{2}\right)\right) - \ln 4 + \frac{\ln 6}{2} + \frac{\ln 8}{2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x-2}{\sqrt{x\cdot(x+2)}}\right) + \frac{-2\cdot\ln 4 + \ln 6 + \ln 8}{2} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x\cdot(x+2)}}\right) + \frac{-4\cdot\ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + 3\cdot\ln 2}{2} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right) + \frac{\ln 3}{2} = \ln 1 + \frac{\ln 3}{2} = 0 + \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 3}{2}$.