KOLOKWIUM nr 7, 14.04.2016, godz. 8.15-9.00

Zadanie **10.** **(10 punktów)** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 18^n}{\binom{3n}{n}\cdot n^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego w zadaniu szeregu:

$$\frac{(n+1)!\cdot 18^{n+1}}{\binom{3n+3}{n+1}\cdot (n+1)^{n+1}}\cdot\frac{\binom{3n}{n}\cdot n^n}{n!\cdot 18^n}=\frac{(n+1)\cdot 18\cdot\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!\cdot(2n+2)!}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{18}{\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{18}{\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot 3}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot 2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{18}{\frac{27}{4}\cdot e}=\frac{8}{3e}=\frac{2,(6)}{e}<1\,,$$

skąd na mocy kryterium d'Alemberta wynika zbieżność szeregu.

Skorzystaliśmy przy tym z nierówności $e>2,(6)$, która wynika albo z zapamiętanego rozwinięcia dziesiętnego $e=2,7\ldots$, albo ze wzoru

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}>\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Zadanie **11. (10 punktów)** Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić nierówności

$$C\cdot\pi^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3} \leqslant 2C\cdot\pi^2\,.$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Rozwiązanie:

Szacujemy dany w zadaniu szereg od dołu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+0+0}}{12n^4+n^4+3n^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{16n^4} = \frac{1}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{48}\cdot\pi^2$$

i od góry:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n^4+n^4}}{12n^4+0+0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{12n^4} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24}\cdot\pi^2\,.$$

Wobec równości $\frac{1}{24}=2\cdot\frac{1}{48}$ udowodniliśmy żądane nierówności ze stałą $C=\frac{1}{48}$.