KOLOKWIUM nr 9, 28.04.2016, godz. 8.15-9.00

Zadanie **13.** **(10 punktów)** Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^2 \frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}$.

Rozwiązanie:
Wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{4x^5-3}\,,$$

czyli

$$t^3=4x^5-3$$

oraz formalnie

$$3t^2\,dt=20x^4\,dx\,,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x\in[1,2]$ odpowiada przedział $t\in[1,5]$.

Otrzymujemy

$$\int_1^2 \frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5 \frac{t^2\,dt}{1+t}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5 \frac{(t+1)\cdot(t-1)+1}{1+t}\,dt=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5 t-1+\frac{1}{1+t}\,dt=$$

$$=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\Bigg|_{t=1}^{5}\right)=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{25}{2}-5+\ln 6-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right)=\frac{3}{20}\cdot(8+\ln 3)=$$

$$=\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln 3}{20}\,.$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln 3}{20}$.

Zadanie **14.** **(10 punktów)** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot(4n)!\cdot x^{pn}}{n!\cdot n^{pn}} \tag{1}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(2n+2)!\cdot(4n+4)!\cdot x^{pn+p}}{(n+1)!\cdot(n+1)^{pn+p}}\cdot\frac{n!\cdot n^{pn}}{(2n)!\cdot(4n)!\cdot x^{pn}}\right| =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)\cdot|x|^p}{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn}\cdot(n+1)^p} =$$

$$= \frac{8\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)}{(n+1)^{p-1}}\cdot\frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \to 2^{10}\cdot\frac{|x|^p}{e^p}$$

przy $n\to\infty$, o ile $p-1=4$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $2^{10}\cdot\frac{|x|^5}{e^5}$ dla $p=5$.

Jeżeli $2^{10}\cdot\frac{|x|^5}{e^5}<1$, czyli $|x|<\frac{e}{4}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $2^{10}\cdot\frac{|x|^5}{e^5}>1$, czyli $|x|>\frac{e}{4}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{e}{4}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=5$ promień zbieżności $\frac{e}{4}$.