

Kolokwium 3 (17.03.2016) - materiał poziomu B do zad. 806

Kolokwium 4 (24.03.2016) - materiał poziomu B do zad. 835

Kolokwium 5 (31.03.2016) - materiał poziomu B do zad. 866

Całka oznaczona.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 15–16.03.2016 (grupy 2–3, poziom B),
a w miarę wolnego czasu także na ćwiczeniach 14.03.2016 (grupa 1).

Podać wzór na $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ oraz obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

781. $f(x) = 1$, $a = 5$, $b = 8$

782. $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$

783. $f(x) = x$, $a = 1$, $b = 5$

784. $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 5$

785. $f(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 1$

786. $f(x) = 2x + 5$, $a = -3$, $b = 4$

787. $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$, $b = 2$

788. $f(x) = x^3 + x$, $a = 0$, $b = 4$

789. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów przedziału całkowania oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna:

790. $\int_0^{20} x dx$

791. $\int_1^{10} e^{2x} dx$

792. $\int_{-1}^1 |x| dx$

Udowodnić następujące nierówności:

793. $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$

794. $\frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$

795. $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$

796. $\int_0^1 x \cdot (1 - x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$

797. $5 < \int_1^3 x^x dx < 31$

798. $\int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$

799. Niech $C(a, b) = \left[\int_a^b \log_x 2 dx \right]$, gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Podać wartości następujących wyrażeń:

a) $C(80, 122)$

b) $C(200, 240)$

c) $C(400, 440)$

d) $C(800, 880)$

800. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość $\int_a^b \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{\ln 5}{2}$.

a) $a = 0$

b) $a = 1$

c) $a = 2$

d) $a = 3$

Obliczyć całki oznaczone:

801. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx$

802. $\int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx$

803. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$

804. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$

805. $\int_0^\pi x^3 \cdot \sin x dx$

806. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 22–23.03.2016 (grupy 2–3, poziom B),
a w miarę wolnego czasu także na ćwiczeniach 21.03.2016 (grupa 1).

Obliczyć całki oznaczone:

$$\begin{array}{lll}
 807. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1 + \ln x}} & 808. \int_1^2 \frac{dx}{x + x^3} & 809. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} \\
 810. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3 - x) dx & 811. \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx & 812. \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx \\
 813. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2017} dx & 814. \int_0^2 \arctg[x] dx & 815. \int_0^2 [\cos x^2] dx & 816. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \\
 817. \int_0^5 |x^2 - 5x + 6| dx & 818. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx & 819. \int_1^2 x \cdot \log_2 x dx \\
 820. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx & 821. \int_0^{6\pi} |\sin x| dx & 822. \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^{11} x dx \\
 823. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx & 824. \int_{-\pi}^{\pi} x^{2017} \cdot \cos x dx & 825. \int_0^{2\pi} (x - \pi)^{2017} \cdot \cos x dx
 \end{array}$$

Obliczyć granice

$$\begin{array}{l}
 826. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \\
 827. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}} \\
 828. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \cdot n \\
 829. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}} \\
 830. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n} \right) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \\
 831. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \\
 832. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \\
 833. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n^2} + \frac{1}{7n^2+1} + \frac{1}{7n^2+2} + \frac{1}{7n^2+3} + \dots + \frac{1}{8n^2} \\
 834. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \\
 835. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3} + \frac{n^2+1}{(3n+1)^3} + \frac{n^2+2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2+3}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2+n}{(4n)^3}
 \end{array}$$

Zadania do samodzielnego¹ rozwiązania dla studentów grupy 2 (poziom B).**Zadania do omówienia na ćwiczeniach 30.03.2016 (grupa 3, poziom B).**

Obliczyć granice

836. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n} + \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$

837. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$

838. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

839. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi (określonymi opisem lub równaniem):

840. $y = x^2$ i $y = 2x + 5$

841. $y = e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0,1)$ i $(1,e)$

842. $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$

843. $y = x^4$ i $y = x^3$

844. $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$

845. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć długość łuku krzywej o równaniu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

846. x , 1 , 2

847. $2x - 3$, -7 , 12

848. x^2 , 0 , 1 **Wskazówka:** Skorzystać z tablic całek.

849. e^x , 1 , 2

850. $\sqrt{x^3}$, 6 , 10

851. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 0 , 1

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej o równaniu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

852. x^3 , 0 , 5

853. e^{-x} , 0 , 10

854. \sqrt{x} , 0 , 4

855. $\sin x$, 0 , π

856. $\cos 7x$, 0 , 2π

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru zdefiniowanego nierównościami $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$

857. \sqrt{x} , 0 , 1

858. x , 1 , 5

859. x^7 , 0 , 10

860. e^x , -3 , 0

861. $\sin x$, 0 , $\frac{3\pi}{2}$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OY obszaru ograniczonego krzywymi o podanych równaniach:

862. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 5$

863. $y = \sin x$ i $y = -\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

864. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$

865. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$

866. $y^2 = 1 - (x - 2)^2$

¹Dotyczy studentów grupy 2, którzy nie wpadną na to, że można pójść na ćwiczenia grupy 3 w dniu 30 marca 2016 r.