**Kolokwium 53 (21.03.2016) - materiał do zad. 806 i zad. 867–876**
**Kolokwium 54 (4.04.2016) - materiał do zad. 890**

# Całka oznaczona.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach 14.03.2016**
**(grupa 1, poziom C, 4 godziny: 14–18).**

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów przedziału całkowania oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna:

**867.** $\int\limits_2^4 x^{10}\,dx$ (**Wsk.** $2\cdot 2^{k/n}$) **868.** $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (**Wsk.** $e^{k/n}$) **869.** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx$ (**Wsk.** $\frac{k^3}{n^3}$)

**870.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ (**Wsk.** $2^{k/n}$) **871.** $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx$ (**Wsk.** $\frac{4k^2}{n^2}$)

Udowodnić następujące nierówności:

**872.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx < 2$ **873.** $2\sqrt{2} < \int\limits_2^4 x^{1/x}\,dx$

**874.** $\frac{19}{3} < \int\limits_2^3 x^x\,dx < \frac{65}{4}$. **Wsk.** Oszacować $x^x$ przez $x^a$.

**875.** Przedstaw na rysunku następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej $f$ na przedziale $[a,b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n},\,a+k\frac{b-a}{n}\right]} f(x) \qquad (A)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n},\,a+k\frac{b-a}{n}\right]} f(x) \qquad (B)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (C)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (D)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1/2)\frac{b-a}{n}\right) \qquad (E)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \qquad (F)$$

**876.** Zastosuj każdy ze wzorów z poprzedniego zadania do obliczenia całki $\int\limits_{-1}^{1} x^2$.
Porównaj błędy przybliżenia tej całki przez tysięczne wyrazy ciągów ($n=1000$) występujących w powyższych wzorach.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach 21.03.2016**
**(grupa 1, poziom C, 4 godziny: 14–18).**

Obliczyć granice

**877.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\sin\frac{3}{n}+...+\sin\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

**878.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{2}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{3}{n}}}+...+e^{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)$ (pierwiastki są w wykładnikach)

**879.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+...+\sqrt[3]{2n}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+...+\sqrt{2n}}$

**880.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

**Wsk.** Niewymierność $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ całkujemy wykonując podstawienie $t=\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$.

**881.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2}+\frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2}+\frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2}+...+\frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$

**Wskazówka:** Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

**882.** Obliczyć długość łuku krzywej o równaniu $y=\sqrt{x+4}^3$ , $0\leqslant x\leqslant 5$ .

**883.** Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru zdefiniowanego nierównościami $0\leqslant y\leqslant xe^x$ , $0\leqslant x\leqslant 1$.

**884.** Obliczyć długość łuku krzywej o równaniu $y=\ln x$ , $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ .

**885.** Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru zdefionizowanego nierównościami $\mathrm{arctg}x\leqslant y\leqslant\sqrt{\mathrm{arctg}^2x+\sqrt{1+\sin x}}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$

**886.** Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

**887.** Od pomarańczy o grubej skórze odkrojono końce tak, aby ukazał się miąższ. Pozostałą część pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.

**888.** Pasem o szerokości $d$ nazywamy obszar płaszczyzny zawarty pomiędzy dwiema prostymi równoległymi odległymi o $d$, wraz z tymi prostymi.
Czy koło można pokryć pasami o sumie szerokości mniejszej od średnicy koła?
Pasów ma być skończenie wiele.

**889.** Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

**890.** Gdzie leży środek ciężkości półkuli?