

Kolokwium 55 (11.04.2016) - materiał do zad. 925

Całki niewłaściwe - obliczanie, kryterium porównawcze.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 4.04.2016

(grupa 1, poziom C, 4 godziny: 14–18).

OSZUSTWO 916. (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int_{-1}^1 f(x)dx$ nie powinno nastęrczać trudności. Ponieważ

$$f(x) = \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x = 0$, po wykonaniu podstawienia $t = e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} = - \int_{1/e}^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= -\operatorname{arctgt} \Big|_{1/e}^e = -\operatorname{arctge} + \operatorname{arctg} \frac{1}{e} = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctge} < 0 \end{aligned}$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne:

$$917. \int_{-2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x} + e^{-2/x} + 2)} dx \quad 918. \int_{-1}^1 \ln|x| dx \quad 919. \int_1^{+\infty} \frac{7x^2 + 8x - 9}{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x} dx$$

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$920. f(n) = \frac{1}{n}, \text{ ale całka } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest zbieżna.}$$

$$921. f(n) = \frac{1}{n^2}, \text{ ale całka } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest rozbieżna.}$$

$$922. f(n) = n, \text{ ale całka } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest zbieżna.}$$

$$923. f(n) = 0, \text{ ale całka } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest rozbieżna.}$$

$$924. f(n) = e^n, \text{ ale całka } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ jest zbieżna.}$$

$$925. f(n) = 1, \text{ a przy tym } \int_1^{\infty} f(x)dx = 1 \text{ oraz } \int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = 1000.$$