Kolokwium 56 (18.04.2016) - materiał do zad. 983

Szeregi liczbowe o wyrazach nieujemnych - badanie zbieżności.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 11.04.2016
(grupa 1, poziom C, 4 godziny: 14–18).

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

962. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

963. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

964. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

965. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leqslant 100$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

966. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

967. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

968. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

969. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

970. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

971. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

---

972. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k + \sqrt{n} - 4}}{8n^4 - 3n^3 + 5}$$

w zależności od parametru naturalnego k.

973. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^7 + 1} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1} + 1}}{n^7 + 1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k, że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

974. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

975. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

976. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^{n} (2i+1)$.

977. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

978. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$ **979.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$ **980.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

981. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ jest zbieżny.

982. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ jest zbieżny.

983. Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej g podać przykład ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich spełniającego warunek

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = g\,.$$

Dla podanych przykładów zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dla jednej wartości g podać dwa przykłady, prowadzące do szeregu zbieżnego i rozbieżnego.