**Kolokwium 8 (21.04.2016) - materiał poziomu B do zad. 1019**

## Szeregi liczbowe o wyrazach dowolnego znaku – – badanie zbieżności.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach 19–20.04.2016 (grupy 2–3, poziom B), a w miarę wolnego czasu także na ćwiczeniach 18.04.2016 (grupa 1).**

Rozstrzygnąć, które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

**984.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ **985.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$ **986.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

**987.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n+1}{n}$ **988.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$ **989.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$

**990.** $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+...+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-...-\frac{1}{k}+...$ ( $k$ razy )

**991.** $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-...-\frac{1}{k^2}+...$ ( $k$ razy )

**992.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$ **993.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ **994.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$ **995.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$

**996.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **997.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$ **998.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$

**999.** Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

**a)** $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$ ..... **b)** $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{7}{4}$ .....

**c)** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}$ ..... **d)** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5}{4}$ .....

**1000.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}$.

**1001.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)}$.

**1002.** Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

W każdym z poniższych 17 zadań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z, R, N**:

**Liczba S** - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

**Z** - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

**R** - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

**N** - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 50, a pierwszy wyraz jest równy 4. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

**1003.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2a_n = .....$ **1004.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+a_n) = .....$ **1005.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} = .....$

**1006.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2a_n) = .....$ **1007.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = .....$ **1008.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = .....$

**1009.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = .....$ **1010.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = .....$ **1011.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = .....$

**1012.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = .....$ **1013.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = .....$ **1014.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{a_n} = .....$

**1015.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = .....$ **1016.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = .....$ **1017.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2+9} = .....$

**1018.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2+9} - \sqrt{a_{n+1}^2+9}\right) = .....$ **1019.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - a_{n+1})\cdot(a_n + a_{n+1})}{\sqrt{a_n^2+9}+\sqrt{a_{n+1}^2+9}} = .....$

## Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg $(a_n)$ jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównawcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q|<1$, rozbieżny dla pozostałych $q$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a<-1$, rozbieżny dla pozostałych $a$.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^a n}$ jest zbieżny dla $a>1$, rozbieżny dla pozostałych $a$. Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli $(a_n)$ jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 \ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

8. SZEREGI NAPRZEMIENNE.

Jeżeli $(a_n)$ jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

9. KRYTERIUM D'ALEMBERTA DLA CIĄGÓW.

Jeżeli $(a_n)$ jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to ciąg $(a_n)$ jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

10. KRYTERIUM CAUCHY'EGO DLA CIĄGÓW.

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g < 1$ , to ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = g > 1$ , to ciąg $(a_n)$ jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.