Szeregi potęgowe - rozwiązania zadań 1050-1060.

1050. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+35)^{n^2} \cdot x^{5n}}{n^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy do danego w zadaniu szeregu potęgowego kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{\frac{(n+35)^{n^2} \cdot |x|^{5n}}{n^{n^2}}} = \frac{(n+35)^n \cdot |x|^5}{n^n} = \left(1+\frac{35}{n}\right)^n \cdot |x|^5 \to e^{35} \cdot |x|^5,$$

gdzie ostatnia zbieżność ma miejsce przy $n \to +\infty$.

Szereg jest więc zbieżny, gdy $e^{35} \cdot |x|^5 < 1$, czyli $|x| < e^{-7}$, natomiast jest rozbieżny, gdy $e^{35} \cdot |x|^5 > 1$, czyli $|x| > e^{-7}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności e^{-7}.

1051. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n^2}}{\sqrt{n} \cdot 5^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{5n^2}}{\sqrt{n} \cdot 5^{n^2}}\right|} = \frac{|x|^{5n}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}} \cdot 5^n} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \cdot \left(\frac{|x|^5}{5}\right)^n = b_n$$

i zauważamy, że wobec $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ zachodzi zbieżność

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

Jeżeli $\frac{|x|^5}{5} < 1$, czyli

$$|x| < \sqrt[5]{5},$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 < 1$, skąd wynika, że dany w zadaniu szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{|x|^5}{5} > 1$, czyli

$$|x| > \sqrt[5]{5},$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $\sqrt[5]{5}$ i pozostaje zbadać jego zachowanie na końcach przedziału zbieżności.

Dla $x = \sqrt[5]{5}$ szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

i jest rozbieżny jako szereg postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, gdzie $p \leqslant 1$.

Natomiast dla $x=-\sqrt[5]{5}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

i w oczywisty sposób spełnia założenia kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, jest więc zbieżny.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział

$$\left[-\sqrt[5]{5},\ \sqrt[5]{5}\right).$$

1052. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 2^n\cdot x^{3n}}{n^n\cdot\binom{3n}{n}}.$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(n+1)^{n+1}\cdot\binom{3n+3}{n+1}}\cdot\frac{n^n\cdot\binom{3n}{n}}{n!\cdot 2^n\cdot x^{3n}}\right|=\frac{(n+1)\cdot 2\cdot|x|^3}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{(3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)}{(n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)}}=$$

$$=\frac{2\cdot|x|^3\cdot(n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)}{\frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot(3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)}=\frac{2\cdot|x|^3\cdot(n+1)\cdot 2\cdot(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 3\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)}\to\frac{8\cdot|x|^3}{e\cdot 27}$$

przy $n\to\infty$.

Zatem dany w zadaniu szereg potęgowy jest zbieżny, jeżeli

$$\frac{8\cdot|x|^3}{e\cdot 27}<1,\quad \text{czyli}\quad |x|<\frac{3\sqrt[3]{e}}{2},$$

a rozbieżny, jeżeli

$$\frac{8\cdot|x|^3}{e\cdot 27}>1,\quad \text{czyli}\quad |x|>\frac{3\sqrt[3]{e}}{2}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{3\sqrt[3]{e}}{2}$.

1053. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)\cdot 3^n\cdot x^{3n}}{n^2+10}.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{(n+4)\cdot 3^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(n+1)^2+10}\cdot\frac{n^2+10}{(n+3)\cdot 3^n\cdot x^{3n}}\right|=\frac{(n+4)\cdot(n^2+10)\cdot 3\cdot|x|^3}{((n+1)^2+10)\cdot(n+3)}\to 3\cdot|x|^3.$$

Jeżeli $3\cdot|x|^3<1$, czyli

$$|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

to szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś $3\cdot|x|^3>1$, czyli

$$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\,,$$

to szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/\sqrt[3]{3}$ i pozostaje zbadać jego zachowanie na końcach przedziału zbieżności.

Dla $x=1/\sqrt[3]{3}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+10}\,.$$

Udowadniamy jego rozbieżność korzystając z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+10}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+0}{n^2+10n^2}=\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty\,.$$

Dla $x=-1/\sqrt[3]{3}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+10}\cdot(-1)^n\,.$$

Udowadniamy jego zbieżność korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{10}{n^2}}=\frac{0}{1}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n+3}{n^2+10}\geqslant\frac{n+4}{(n+1)^2+10}\,.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$(n+3)\cdot\left(n^2+2n+11\right)\geqslant(n+4)\cdot\left(n^2+10\right)$$

$$n^3+2n^2+11n+3n^2+6n+33\geqslant n^3+10n+4n^2+40$$

$$n^3+5n^2+17n+33\geqslant n^3+4n^2+10n+40$$

$$n^2+7n-7\geqslant 0$$

$$n^2+7(n-1)\geqslant 0\,,$$

co jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział

$$\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\,.$$

1054. Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5 \text{ dla } x=1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 20 \text{ dla } x=2\,.$$

Rozwiązanie:
Wystarczy przyjąć $a_2=5$ oraz $a_n=0$ dla $n\neq 2$.

1055. Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 \text{ dla } x=1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 18 \text{ dla } x=3\,.$$

Rozwiązanie:
Wystarczy przyjąć $a_2=2$ oraz $a_n=0$ dla $n\neq 2$.

1056. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{n^2}}{n^{1000}}\,.$$

Rozwiązanie:
Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\left|\frac{2^{n+1}\cdot x^{(n+1)^2}}{(n+1)^{1000}} \cdot \frac{n^{1000}}{2^n \cdot x^{n^2}}\right| = 2\cdot |x|^{2n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1000} \to \begin{cases} +\infty > 1 & \text{dla } |x|>1 \\ 2>1 & \text{dla } |x|=1 \\ 0<1 & \text{dla } |x|<1 \end{cases}$$

Stąd wynika, że dany szereg jest zbieżny tylko dla $|x|<1$.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-1,1)$.

1057. Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności równym 2, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 4 \text{ dla } x=1\,.$$

Rozwiązanie:
Wystarczy przyjąć $a_0=3$ oraz $a_n=1/2^n$ dla $n\geqslant 1$.

Inny przykład: $a_n=2/2^n$.

1058. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((3n)!)^{2n}\cdot x^{6n^2}}{((2n)!)^{3n}}\,.$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{((3n)!)^{2n}\cdot x^{6n^2}}{((2n)!)^{3n}}} = \frac{((3n)!)^{2}\cdot x^{6n}}{((2n)!)^{3}} = b_n\,.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n), przy założeniu $x \neq 0$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{((3n+3)!)^2 \cdot x^{6n+6}}{((2n+2)!)^3} \cdot \frac{((2n)!)^3}{((3n)!)^2 \cdot x^{6n}} = \frac{((3n+3)!)^2}{((3n)!)^2} \cdot \frac{((2n)!)^3}{((2n+2)!)^3} \cdot x^6 =$$

$$= \frac{(3n+3)^2 \cdot (3n+2)^2 \cdot (3n+1)^2}{(2n+2)^3 \cdot (2n+1)^3} \cdot x^6 = \frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \left(3+\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(3+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^3} \cdot x^6 \to \frac{3^6 \cdot x^6}{2^6}$$

przy $n \to \infty$.

Jeżeli $\dfrac{3^6 \cdot x^6}{2^6} < 1$, czyli

$$|x| < \frac{2}{3},$$

to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu potęgowego danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\dfrac{3^6 \cdot x^6}{2^6} > 1$, czyli

$$|x| > \frac{2}{3},$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności 2/3.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy 2/3.

1059. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n^2} \cdot x^{n^2}}{((2n)!)^n}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{n^{2n^2} \cdot |x|^{n^2}}{((2n)!)^n}} = \frac{n^{2n} \cdot |x|^n}{(2n)!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n), przy założeniu $x \neq 0$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{2n+2} \cdot |x|^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n} \cdot |x|^n} = \frac{(n+1)^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}}{(2n+2) \cdot (2n+1)} \cdot |x| =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{n+1}{2 \cdot (2n+1)} \cdot |x| \to \frac{e^2}{4} \cdot |x|$$

przy $n \to \infty$.

Jeżeli $\dfrac{e^2}{4} \cdot |x| < 1$, czyli

$$|x| < \frac{4}{e^2},$$

to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 < 1\,,$$

skąd w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu potęgowego danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{e^2}{4}\cdot|x|>1$, czyli

$$|x| > \frac{4}{e^2}\,,$$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $4/e^2$.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $4/e^2$.

1060. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!\cdot x^{6n}}{(2n)!\cdot n^{pn}} \tag{1}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(4n+4)!\cdot x^{6n+6}}{(2n+2)!\cdot(n+1)^{pn+p}}\cdot\frac{(2n)!\cdot n^{pn}}{(4n)!\cdot x^{6n}}\right| = \frac{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)\cdot x^6}{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn}\cdot(n+1)^p} =$$

$$= \frac{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot 2}{(2n+1)\cdot(n+1)^p}\cdot\frac{x^6}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \to 64\cdot\frac{x^6}{e^p}$$

przy $n\to\infty$, o ile $p=2$, bo tylko dla $p=2$ pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów równej $\frac{64}{e^2}\cdot x^6$ dla $p=2$.

Jeżeli $\frac{64}{e^2}\cdot x^6<1$, czyli $|x|<\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{64}{e^2}\cdot x^6>1$, czyli $|x|>\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=2$ promień zbieżności $\frac{\sqrt[3]{e}}{2}$.