Kolokwium 10 (5.05.2016) - materiał poziomu B do zad. 1075

Szeregi potęgowe: różniczkowanie wyraz za wyrazem, szereg Taylora.

Zadania do samodzielnego[1] rozwiązania dla studentów grupy 2 (poziom B).
Zadania do omówienia na ćwiczeniach 4.05.2016 (grupa 3, poziom B).
Czas pozostały po omówieniu zadań należy poświęcić na powtórkę.

1071. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina (czyli szeregu Taylora w zerze) funkcji

$$f(x)=\sqrt{x+2}\,.$$

1072. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\,.$$

1073. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x)=\ln(x+e)\,.$$

1074. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x)=\sqrt[3]{x+27}\,.$$

1075. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:
Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\text{..........................}=\text{..........................}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

[1]Dotyczy studentów grupy 2, którzy nie wpadną na to, że można pójść na ćwiczenia grupy 3 w dniu 4 maja 2016 r.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\text{...} . \qquad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$....... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(......)=...... ,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(......)=\text{...}+C=$$

$$=\text{...}+C .$$

Stąd

$$C=\text{...}$$

i ostatecznie

$$f(x)=\text{...} . \qquad (3)$$

Przyjmując $x=$...... we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(......)=\text{...}=$$

$$=\text{...}=$$

$$=\text{...} .$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....