

**PRZYPOMNIENIE: dodatkowy wykład
w poniedziałek 16 maja 2016 r. godz. 14-16 sala HS.**

Kolokwium 10,5 (12.05.2016) - materiał poziomu B do zad. 1139

Liczby zespolone, zespolone szeregi liczbowe i potęgowe

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 10–11.05.2016 (grupy 2–3, poziom B),
a w miarę wolnego czasu także na ćwiczeniach 9.05.2016 (grupa 1).

1076. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań:

1077. $\bar{z} = z^2$ 1078. $\bar{z} = z^{-1}$ 1079. $1+i = z^2$ 1080. $3+4i = z^2$ 1081. $z^2\bar{z} = 8i$

1082. $-3+4i = z^2$ 1083. $z^2+z = i$ 1084. $z^2+iz = 1$ 1085. $z = \bar{z}+1$

1086. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ 1087. $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$ 1088. $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ 1089. $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej:

1090. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$

1091. $3|z| \leq |z^2| + 1$

1092. $|z| = |\bar{z} + 1|$

1093. $|z+i| \leq |z-i|$

1094. $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$

1095. $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

1096. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD , punkt A jest środkiem odcinka PC , punkt B jest środkiem odcinka AC . Punkt E leży na prostej PD , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE .

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta i kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$1097. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} \quad 1098. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} \quad 1099. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} \quad 1100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$1101. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad 1102. \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad 1103. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad 1104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{\sqrt{n}} \quad 1105. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1106. Niech $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę całkowitą k , aby zachodziła równość $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$. Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

- a) $m = 10, n = 1, k = \dots\dots\dots$;
 b) $m = 15, n = 2, k = \dots\dots\dots$;
 c) $m = 20, n = 3, k = \dots\dots\dots$;
 d) $m = 50, n = 4, k = \dots\dots\dots$.

1107. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą liczbę naturalną $n > 1$ taką, że $z^n = z$.

- a) $z = i, n = \dots\dots\dots$;
 b) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, n = \dots\dots\dots$;
 c) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, n = \dots\dots\dots$;
 d) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, n = \dots\dots\dots$.

1108. Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

1109. Czy nierówność $|z+1| < |z-4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$;
 b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$;
 c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$;
 d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$?

1110. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$;
 b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$;
 c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$;
 d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$?

1111. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6 = -64$

- a) $z = 1 + i\sqrt{3}$;
 b) $z = -1 + i\sqrt{3}$;
 c) $z = \sqrt{3} + i$;
 d) $z = -\sqrt{3} + i$?

1112. Czy równość $z^{13} = z$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = -i$;
 b) $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$;
 c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
 d) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$?

1113. Czy równość $\bar{z}^{13} = z^{-13}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \frac{3+4i}{5}$;
 b) $z = \frac{5+8i}{9}$;
 c) $z = \frac{5+i\sqrt{23}}{8}$;
 d) $z = \frac{6+i\sqrt{13}}{7}$?

1114. Niech $R(m,n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

- a) $R(2,3) = 5$;
 b) $R(3,4) = 6$;
 c) $R(4,6) = 8$;
 d) $R(3,6) = 8$?

1115. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

- a) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 13 + 4i$;
 b) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 8 + 8i$;
 c) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 5 + 9i$;
 d) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 7 + 11i$?

1116. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| \leq |z - 3|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$
 c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$

1117. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - i| \leq |z - 5i|$

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$
 c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$

1118. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $\bar{z} = z^{-1}$

a) $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

b) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

c) $z = 2 + 3i$

d) $z = 3 + 4i$

1119. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^6 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = i$

1120. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^8 = 1$

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = i$

1121. Czy nierówność $|z - 1| < |z - 5|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

1122. Czy nierówność $|z| < |z - 4i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

1123. Czy nierówność $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

1124. Czy nierówność $|z - 7| < |z - 7i|$ jest prawdziwa dla

a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 + 2i$ c) $z = 3 + 3i$ d) $z = 4 + 4i$

1125. Czy liczba $(\sqrt{3} + i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

1126. Czy liczba $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

1127. Czy liczba $(-1 + i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n = 2012$ b) $n = 2013$ c) $n = 2014$ d) $n = 2016$

Na każde z poniższych 12 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.

Czy zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla

1128. $z = 1$

1129. $z = -1$

1130. $z = i$

1131. $z = \frac{3 + 4i}{5}$

1132. $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

1133. $z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

1134. $z = \frac{5 + 5i}{7}$

1135. $z = \frac{7 - 4i}{8}$

1136. $z = \frac{2 + 2i}{3}$

1137. $z = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

1138. $z = 3i \cdot \log_{26} 3$

1139. $z = 2i \cdot \log_{26} 5$