

**1106.** Niech  $z = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$ . Dla podanych liczb  $m, n$  podać taką liczbę całkowitą  $k$ , aby zachodziła równość  $z^m \cdot \bar{z}^n = z^k$ . Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

- a)  $m = 10, n = 1, k = \mathbf{9}$ ;  
 b)  $m = 15, n = 2, k = \mathbf{13}$ ;  
 c)  $m = 20, n = 3, k = \mathbf{17}$ ;  
 d)  $m = 50, n = 4, k = \mathbf{46}$ .

*Rozwiązanie:*

Ponieważ  $|z| = 1$ , zachodzi równość  $\bar{z} = z^{-1}$ , a w konsekwencji  $\bar{z}^n = z^{-n}$ . Zatem poprawna odpowiedź to  $k = m - n$ .

**1107.** Dla podanej liczby zespolonej  $z$  podać najmniejszą liczbę naturalną  $n > 1$  taką, że  $z^n = z$ .

- a)  $z = i, n = \mathbf{5}$ ;  
 b)  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, n = \mathbf{9}$ ;  
 c)  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, n = \mathbf{4}$ ;  
 d)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, n = \mathbf{13}$ .

*Rozwiązanie:*

Podane liczby zespolone mają moduł 1 i argumenty odpowiednio:  $\pi/2, \pi/4, 2\pi/3, -\pi/6$ , skąd wynika, że są one pierwiastkami z jednościami odpowiednio stopni 4, 8, 3 i 12.

**1108.** Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

*Rozwiązanie:*

*Sposób I*

Przekształcając dane w treści zadania równanie otrzymujemy kolejno równania równoważne:

$$\begin{aligned} z\bar{z} - z - \bar{z} &= 0, \\ z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 &= 1, \\ (z-1)(\bar{z}-1) &= 1, \\ (z-1)\overline{(z-1)} &= 1, \\ |z-1|^2 &= 1, \\ |z-1| &= 1, \end{aligned}$$

skąd wynika, że zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb odległych na płaszczyźnie zespolonej o 1 od liczby 1, czyli okrąg o środku 1 i promieniu 1.

*Sposób II*

Po podstawieniu  $z = x + yi$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ , dane w zadaniu równanie przyjmuje kolejno postać:

$$(x + yi)(x - yi) = x + yi + x - yi,$$

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1,$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

a zatem zbiorem rozwiązań jest okrąg o promieniu 1 i środku  $(x, y) = (1, 0)$ , czyli  $z = 1$ .

**1109.** Czy nierówność  $|z + 1| < |z - 4|$  jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$ ; **NIE**
- b)  $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$ ; **TAK**
- c)  $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$ ; **NIE**
- d)  $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$ ; **TAK**

**1110.** Czy równość  $\bar{z}^2 = z^{-2}$  (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$ ; **TAK**
- b)  $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$ ; **TAK**
- c)  $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$ ; **NIE**
- d)  $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$ ; **TAK**

**1111.** Czy podana liczba zespolona spełnia równanie  $z^6 = -64$

- a)  $z = 1 + i\sqrt{3}$ ; **NIE**
- b)  $z = -1 + i\sqrt{3}$ ; **NIE**
- c)  $z = \sqrt{3} + i$ ; **TAK**
- d)  $z = -\sqrt{3} + i$ ; **TAK**

**1112.** Czy równość  $z^{13} = z$  jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a)  $z = -i$ ; **TAK**
- b)  $z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$ ; **TAK**
- c)  $z = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ ; **NIE**
- d)  $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ; **TAK**

1113. Czy równość  $\bar{z}^{13} = z^{-13}$  (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

a)  $z = \frac{3+4i}{5}$ ; **TAK**

b)  $z = \frac{5+8i}{9}$ ; **NIE**

c)  $z = \frac{5+i\sqrt{23}}{8}$ ; **NIE**

d)  $z = \frac{6+i\sqrt{13}}{7}$ ; **TAK**

1114. Niech  $R(m,n)$  będzie liczbą takich liczb zespolonych  $z$ , że

$$(z^m - 1) \cdot (z^n - 1) = 0.$$

Czy wtedy

a)  $R(2,3) = 5$ ; **NIE**

b)  $R(3,4) = 6$ ; **TAK**

c)  $R(4,6) = 8$ ; **TAK**

d)  $R(3,6) = 8$ ; **NIE**

1115. Czy dla podanych liczb zespolonych  $z_1, z_2, z_3$  istnieje taka liczba zespolona  $z$ , że

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$$

a)  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 13 + 4i$ ; **TAK**

b)  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 8 + 8i$ ; **NIE**

c)  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 5 + 9i$ ; **TAK**

d)  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 7 + 11i$ ; **TAK**

1116. Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia nierówność  $|z - 1| \leq |z - 3|$

a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$  **TAK**

b)  $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$  **NIE**

c)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$  **TAK**

d)  $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$  **NIE**

1117. Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia nierówność  $|z - i| \leq |z - 5i|$

a)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$  **TAK**

b)  $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$  **TAK**

c)  $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$  **NIE**

d)  $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$  **NIE**

1118. Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $\bar{z} = z^{-1}$

a)  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  **TAK**

c)  $z = 2 + 3i$  **NIE**

b)  $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$  **NIE**

d)  $z = 3 + 4i$  **NIE**

1119. Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $z^6 = 1$

a)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  **NIE**

c)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  **TAK**

b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  **NIE**

d)  $z = i$  **NIE**

1120. Czy podana liczba zespolona  $z$  spełnia równanie  $z^8 = 1$

a)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  **TAK**

c)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  **NIE**

b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  **NIE**

d)  $z = i$  **TAK**

1121. Czy nierówność  $|z - 1| < |z - 5|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  **TAK**

b)  $z = 2 + 2i$  **TAK**

c)  $z = 3 + 3i$  **NIE**

d)  $z = 4 + 4i$  **NIE**

1122. Czy nierówność  $|z| < |z - 4i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  **TAK**

b)  $z = 2 + 2i$  **NIE**

c)  $z = 3 + 3i$  **NIE**

d)  $z = 4 + 4i$  **NIE**

1123. Czy nierówność  $|z - 5 - 5i| < |z + 1 + i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  **NIE**

b)  $z = 2 + 2i$  **NIE**

c)  $z = 3 + 3i$  **TAK**

d)  $z = 4 + 4i$  **TAK**

1124. Czy nierówność  $|z - 7| < |z - 7i|$  jest prawdziwa dla

a)  $z = 1 + i$  **NIE**

b)  $z = 2 + 2i$  **NIE**

c)  $z = 3 + 3i$  **NIE**

d)  $z = 4 + 4i$  **NIE**

1125. Czy liczba  $(\sqrt{3} + i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  **NIE**

b)  $n = 2013$  **NIE**

c)  $n = 2014$  **NIE**

d)  $n = 2016$  **TAK**

1126. Czy liczba  $(1 - \sqrt{3} \cdot i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  **NIE**

b)  $n = 2013$  **TAK**

c)  $n = 2014$  **NIE**

d)  $n = 2016$  **TAK**

1127. Czy liczba  $(-1 + i)^n$  jest rzeczywista dla

a)  $n = 2012$  **TAK**

b)  $n = 2013$  **NIE**

c)  $n = 2014$  **NIE**

d)  $n = 2016$  **TAK**

Na każde z poniższych 12 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.

Czy zespolony szereg potęgowy  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  jest zbieżny dla

1128.  $z = 1$  **NIE**

1130.  $z = i$  **TAK**

1132.  $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$  **TAK**

1134.  $z = \frac{5 + 5i}{7}$  **NIE**

1136.  $z = \frac{2 + 2i}{3}$  **TAK**

1138.  $z = 3i \cdot \log_{26} 3$  **NIE**

1129.  $z = -1$  **TAK**

1131.  $z = \frac{3 + 4i}{5}$  **TAK**

1133.  $z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$  **TAK**

1135.  $z = \frac{7 - 4i}{8}$  **NIE**

1137.  $z = \frac{4\sqrt{5}}{9}$  **TAK**

1139.  $z = 2i \cdot \log_{26} 5$  **TAK**