PRZYPOMNIENIE: dodatkowy wykład w poniedziałek 16 maja 2016 r. godz. 14-16 sala HS.

Kolokwium 11 (19.05.2016) - materiał poziomu B do zad. 1165

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 17–18.05.2016 (grupy 2–3, poziom B), a w miarę wolnego czasu także na ćwiczeniach 16.05.2016 (grupa 1).

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x\in D_f} |f(x)|\,.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:
Ciag funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0\,.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, a ciąg pochodnych (f_n') jest zbieżny jednostajnie do funkcji g, to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\,.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\to 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągła.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

1148. $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$, $D_f=\mathbb{R}$

1149. $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

1150. $f(x)=x^2$, $D_f=(-1,2)$

1151. $f(x)=x^3$, $D_f=(-4,3)$

1152. $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $D_f=\mathbb{R}$

1153. $f(x)=\operatorname{arctg}\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$

1154. $f(x)=\sin x+\cos x$, $D_f=\mathbb{R}$

1155. $f(x)=x^3-x$, $D_f=(-1,1)$

1156. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

1157. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

1158. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

1159. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

Dla funkcji f określonej podanym wzorem:
a) Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której funkcja g określona wzorem $g(x)=f(x)/x^n$ ma granicę w zerze (skorzystać z odpowiedniej wersji wzoru Taylora).
b) Definiujemy $g(0)$ tak, aby funkcja g była ciągła. Obliczyć $g'(0)$ oraz $g''(0)$.

1160. $f(x)=\sin x-x$

1161. $f(x)=\sin x-x\cos x$

1162. $f(x)=e^{-x}-1-\ln(x+1)$

1163. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$

1164. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\sin x$

1165. $f(x)=\operatorname{arctg} x-2\sin x+x$