PRZYPOMNIENIE: kolejny wykład w poniedziałek 6 czerwca 2016 r. godz. 14-16 sala HS.

Kolokwium 12 (9.06.2016) - materiał poziomu B do zad. 1200

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 24,31.05, 7.06.2016 (grupa 2, poziom B)
Zadania do omówienia na ćwiczeniach 1,8.06.2016 (grupa 3, poziom B)

Szeregi Fouriera

Szeregiem Fouriera funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o okresie 2π, całkowalnej na przedziale długości 2π, nazywamy szereg

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ,$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_A^{A+2\pi}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_A^{A+2\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_A^{A+2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\ ,$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi}f(x)^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji

1179. $f(x)=x$ dla $x\in(-\pi,\pi)$

1180. $f(x)=|x|$ dla $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

1181. $f(x)=x^2$ dla $x\in(-\pi,\pi)$

1182. $f(x)=x^2$ dla $x\in(0,2\pi)$

1183. $f(x)=x^2$ dla $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

1184. $f(x)=e^x$ dla $x\in(-\pi,\pi)$

1185. $f(x)=|\sin x|$ dla $x\in(0,2\pi)$

1186. $f(x)=e^{|x|}$ dla $x\in(-\pi,\pi)$

1187. $f(x)=\sin\frac{3}{2}x$ dla $x\in(0,2\pi)$

1188. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{dla} \quad x\in(0,\pi)\\ \cos x & \text{dla} \quad x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$

1189. $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla} \quad x\in(0,\pi)\\ 0 & \text{dla} \quad x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$

1190. $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla} \quad 0<x<\pi/2\\ 1 & \text{dla} \quad \pi/2<x<2\pi\end{cases}$

1191. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ stosując wzór Parsevala do $f(x)=e^x$ na $(0,2\pi)$ oraz wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

1192. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2}$ wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera funkcji f określonej wzorem $f(x)=\cos(x\sqrt{2})$ na $(0,2\pi)$.

1193. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ używając $f(x)=x(\pi-|x|)$ na $(-\pi,\pi)$.

W kolejnych czterech zadaniach zakładamy, że funkcja f jest na tyle regularna, że nie ma problemu z obliczeniem współczynników jej szeregu Fouriera, a przy tym f jest sumą swojego szeregu Fouriera.

1194. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $2\pi/3$, to w jej szeregu Fouriera $a_n=b_n=0$ dla n niepodzielnych przez 3.

1195. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{\pi}{2}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n=b_n=0$ dla n niepodzielnych przez 4.

1196. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{5}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n=b_n=0$ dla n niepodzielnych przez 5.

1197. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowa o okresie 2π. Dowieść, że f spełnia dla każdego $x\in\mathbb{R}$ równość

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy ....

<<< podać warunek w języku współczynników szeregu Fouriera funkcji f >>>

1198. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^2 x\cdot\cos 5x\cdot\cos 7x\,.$$

1199. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f określoną wzorem $f(x)=\sin^8 x$.

1200. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_{8\pi/7}^{22\pi/7}\cos^{10}x$.

Zadanie dodatkowe. Zdobyć jakikolwiek sensowny program komputerowy rysujący wykresy funkcji. Narysować wykresy funkcji z wybranych kilku zadań spośród 1179-1190 (lub funkcji, które pojawiły się na wykładzie) oraz wykresy kilku początkowych sum częściowych ich szeregów Fouriera.

Przy okazji zrobić to samo z sumami początkowymi szeregu MacLaurina (Taylora w zerze) funkcji określonych wzorami $\sin x$, $\ln(1+x)$, e^x i paru innych.

W przypadku trudności ze zdobyciem programu postarać się zdobyć względy[1] osoby, która program zdobyła.

[1]Wykładowca nie ponosi odpowiedzialności za skutki zdobywania względów wykraczające poza zakres sprecyzowany w treści zadania.