W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 25^k.

a) $n=16000000000000015^{11}$, $k=$ ....

b) $n=16000000000000020^{12}$, $k=$ ....

c) $n=16000000000000075^{25}$, $k=$ ....

d) $n=16000000000000250^{30}$, $k=$ ....

2. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 32^k.

a) $n=16000000000000055^{30}$, $k=$ ....

b) $n=16000000000000048^{25}$, $k=$ ....

c) $n=16000000000000020^{12}$, $k=$ ....

d) $n=16000000000000006^{11}$, $k=$ ....

3. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n, to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k.

a) $n=2^8\cdot 3^4\cdot 5^3$, $k=$ ....

b) $n=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2$, $k=$ ....

c) $n=2^9\cdot 3^5\cdot 5^3$, $k=$ ....

d) $n=2^8\cdot 3^5\cdot 5^3$, $k=$ ....

4. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

a) $71^{34}-10^{34}$, ...

b) $37^{34}-2^{34}$, ...

c) $55^{34}-6^{34}$, ...

d) $73^{34}-10^{34}$, ...

5. Wiedząc, że dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n zachodzą równości $\binom{19}{4}=n$, $\binom{19}{5}=3n$, $\binom{19}{6}=7n$, $\binom{19}{7}=13n$, podać wartość współczynnika dwumianowego jako wielokrotność liczby n.

a) $\binom{20}{5}=$ ....

b) $\binom{20}{7}=$ ....

c) $\binom{20}{6}=$ ....

d) $\binom{20}{15}=$ ....

6. To samo polecenie, co w poprzednim zadaniu.

a) $\binom{22}{7}=$ ....

b) $\binom{21}{14}=$ ....

c) $\binom{21}{6}=$ ....

d) $\binom{21}{7}=$ ....

7. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $2^{125}-3^{25}$, ...

b) $3^{33}-2^{22}$, ...

c) $5^{404}-2^{404}$, ...

d) $7^{404}-2^{404}$, ...

8. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $2^{808}-1$, ...

b) $2^{65}-1$, ...

c) $3^{35}+1$, ...

d) $2^{49}+1$, ...

9. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n, to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k.

a) $n=6^5\cdot 45$, $k=$ ....

b) $n=6^5\cdot 23$, $k=$ ....

c) $n=6^5\cdot 16$, $k=$ ....

d) $n=6^5\cdot 29$, $k=$ ....

10. Dla podanej liczby k wskazać taką liczbę naturalną n, aby zachodziła równość

$$\left(2^{2^{2^k}}\right)^{2^{2^k}} = 2^{2^{2^n}}.$$

a) $k=256$, $n=$ ....

b) $k=16$, $n=$ ....

c) $k=2$, $n=$ ....

d) $k=4$, $n=$ ....

11. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 45^k.

a) $n=30!$, $k=$ ....

b) $n=24!$, $k=$ ....

c) $n=26!$, $k=$ ....

d) $n=28!$, $k=$ ....

12. Niech k będzie liczbą naturalną. Liczbę naturalną n nazwiemy *k-fajną*, jeżeli spełnione są następujące warunki:
• liczba n **nie jest** podzielna przez k,
• liczba n **nie jest** k-tą potęgą liczby naturalnej,
• liczba n^n **jest** k-tą potęgą liczby naturalnej.
Dla podanej liczby k podaj przykład *k-fajnej* liczby n mniejszej od 100.

a) $k=32$, $n=$ ....

b) $k=64$, $n=$ ....

c) $k=81$, $n=$ ....

d) $k=8$, $n=$ ....