W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 25^k.

a) $n=16000000000000015^{11}$, $k=\mathbf{5}$

b) $n=16000000000000020^{12}$, $k=\mathbf{6}$

c) $n=16000000000000075^{25}$, $k=\mathbf{25}$

d) $n=16000000000000250^{30}$, $k=\mathbf{45}$

2. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 32^k.

a) $n=16000000000000055^{30}$, $k=\mathbf{0}$

b) $n=16000000000000048^{25}$, $k=\mathbf{20}$

c) $n=16000000000000020^{12}$, $k=\mathbf{4}$

d) $n=16000000000000006^{11}$, $k=\mathbf{2}$

3. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n, to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k.

a) $n=2^8\cdot 3^4\cdot 5^3$, $k=\mathbf{5^2=25}$

b) $n=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2$, $k=\mathbf{2^4=16}$

c) $n=2^9\cdot 3^5\cdot 5^3$, $k=\mathbf{2^5=32}$

d) $n=2^8\cdot 3^5\cdot 5^3$, $k=\mathbf{3^3=27}$

4. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

a) $71^{34}-10^{34}$, **61**

b) $37^{34}-2^{34}$, **13**

c) $55^{34}-6^{34}$, **61**

d) $73^{34}-10^{34}$, **83**

5. Wiedząc, że dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n zachodzą równości $\binom{19}{4}=n$, $\binom{19}{5}=3n$, $\binom{19}{6}=7n$, $\binom{19}{7}=13n$, podać wartość współczynnika dwumianowego jako wielokrotność liczby n.

a) $\binom{20}{5}=\mathbf{4n}$

b) $\binom{20}{7}=\mathbf{20n}$

c) $\binom{20}{6}=\mathbf{10n}$

d) $\binom{20}{15}=\mathbf{4n}$

6. To samo polecenie, co w poprzednim zadaniu.

a) $\binom{22}{7}=\mathbf{44n}$

b) $\binom{21}{14}=\mathbf{30n}$

c) $\binom{21}{6}=\mathbf{14n}$

d) $\binom{21}{7}=\mathbf{30n}$

7. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $2^{125}-3^{25}$, **29**

b) $3^{33}-2^{22}$, **23**

c) $5^{404}-2^{404}$, **29**

d) $7^{404}-2^{404}$, **53**

8. Dla podanej liczby wskazać jej dwucyfrowy dzielnik pierwszy.

a) $2^{808}-1$, **17**

b) $2^{65}-1$, **31**

c) $3^{35}+1$, **61**

d) $2^{49}+1$, **43**

9. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n, to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k.

a) $n=6^5\cdot 45$, $k=\mathbf{3^4=81}$

b) $n=6^5\cdot 23$, $k=\mathbf{3^3=27}$

c) $n=6^5\cdot 16$, $k=\mathbf{2^5=32}$

d) $n=6^5\cdot 29$, $k=\mathbf{29}$

10. Dla podanej liczby k wskazać taką liczbę naturalną n, aby zachodziła równość

$$\left(2^{2^{2^k}}\right)^{2^{2^k}} = 2^{2^{2^n}}.$$

a) $k=256$, $n=\mathbf{257}$

b) $k=16$, $n=\mathbf{17}$

c) $k=2$, $n=\mathbf{3}$

d) $k=4$, $n=\mathbf{5}$

11. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 45^k.

a) $n=30!$, $k=\mathbf{7}$

b) $n=24!$, $k=\mathbf{4}$

c) $n=26!$, $k=\mathbf{5}$

d) $n=28!$, $k=\mathbf{6}$

12. Niech k będzie liczbą naturalną. Liczbę naturalną n nazwiemy k-*fajną*, jeżeli spełnione są następujące warunki:
- liczba n **nie jest** podzielna przez k,
- liczba n **nie jest** k-tą potęgą liczby naturalnej,
- liczba n^n **jest** k-tą potęgą liczby naturalnej.

Dla podanej liczby k podaj przykład k-*fajnej* liczby n mniejszej od 100.

a) $k=32$, $n=\mathbf{16}$

b) $k=64$, $n=\mathbf{16}$

c) $k=81$, $n=\mathbf{27}$

d) $k=8$, $n=\mathbf{4}$ **lub** $n=\mathbf{36}$