W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

a) $\left[\frac{1}{3-\sqrt{10}}\right] = \mathbf{-7}$

b) $\left[\frac{1}{6-\sqrt{37}}\right] = \mathbf{-13}$

c) $\left[\frac{1}{7-5\sqrt{2}}\right] = \mathbf{-15}$

d) $\left[\frac{1}{8-\sqrt{66}}\right] = \mathbf{-9}$

2. Dla podanej liczby n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin\alpha = \sin(n\cdot\alpha)$.

a) $n=5, \quad \alpha = \mathbf{30}^\circ$

b) $n=4, \quad \alpha = \mathbf{36}^\circ$

c) $n=3, \quad \alpha = \mathbf{45}^\circ$

d) $n=2, \quad \alpha = \mathbf{60}^\circ$

3. Dla podanej liczby n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin\alpha = \cos(n\cdot\alpha)$.

a) $n=9, \quad \alpha = \mathbf{9}^\circ$

b) $n=8, \quad \alpha = \mathbf{10}^\circ$

c) $n=17, \quad \alpha = \mathbf{5}^\circ$

d) $n=14, \quad \alpha = \mathbf{6}^\circ$

4. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $-\frac{5}{3} < \log_8 x < -\frac{2}{3}$ $\quad$ $(\mathbf{1/32,\ 1/4})$

b) $-\frac{1}{3} < \log_8 x < \frac{1}{3}$ $\quad$ $(\mathbf{1/2,\ 2})$

c) $-1 < \log_8 x < 2$ $\quad$ $(\mathbf{1/8,\ 64})$

d) $\frac{1}{2} < \log_8 x < \frac{3}{2}$ $\quad$ $(\mathbf{2\sqrt{2},\ 16\sqrt{2}})$

5. Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $-1 < \log_x 64 < 2$ $\quad$ $(\mathbf{0,\ 1/64}) \cup (\mathbf{8,\ +\infty})$

b) $1 < \log_x 64 < 3$ $\quad$ $(\mathbf{4,\ 64})$

c) $-3 < \log_x 64 < 6$ $\quad$ $(\mathbf{0,\ 1/4}) \cup (\mathbf{2,\ +\infty})$

d) $-6 < \log_x 64 < -2$ $\quad$ $(\mathbf{1/8,\ 1/2})$

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_2 \log_2 \log_2 \log_2 |x| < 1,$ $\quad$ $\left(\mathbf{-2^{16},\ -4}\right) \cup \left(\mathbf{4,\ 2^{16}}\right)$

b) $\log_2 \log_2 \log_2 |x| < 1,$ $\quad$ $(\mathbf{-16,\ -2}) \cup (\mathbf{2,\ 16})$

c) $\log_2 |x| < 1,$ $\quad$ $(\mathbf{-2,\ 0}) \cup (\mathbf{0,\ 2})$

d) $\log_2 \log_2 |x| < 1,$ $\quad$ $(\mathbf{-4,\ -1}) \cup (\mathbf{1,\ 4})$

7. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

a) $3^{27}-1$, **13**

b) $3^{81}-1$, **13**

c) $2^{125}-1$, **31**

d) $2^{25}-1$, **31**

8. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

a) $2^{808}-1$, **17**

b) $3^{808}-1$, **41**

c) $3^{404}-2^{606}$, **17**

d) $3^{404}+2^{404}$, **97**

9. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_2|\log_2\log_2 x|<1$, $\left(\boldsymbol{\sqrt[4]{2}, 2}\right)\cup(\mathbf{2, 16})$

b) $\log_2\log_2|\log_2 x|<1$, $(\mathbf{1/16, 1/2})\cup(\mathbf{2, 16})$

c) $\log_2|\log_2 x|<1$, $(\mathbf{1/4, 1})\cup(\mathbf{1, 4})$

d) $\log_2\log_2\log_2|\log_2 x|<1$, $\left(\mathbf{2^{-16}, 1/4}\right)\cup\left(\mathbf{4, 2^{16}}\right)$

10. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $m \neq n$ taką, że $\{\log_2 m\} = \{\log_2 n\}$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

a) $n=32$, $m=\mathbf{1}$

b) $n=26$, $m=\mathbf{13}$

c) $n=24$, $m=\mathbf{3}$

d) $n=25$, $m=\mathbf{50}$

11. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x)=\{\log_{16} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y. Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(4,64)$, $[\mathbf{0},\mathbf{1/2})\cup(\mathbf{1/2},\mathbf{1})$

b) $(1/2,2)$, $[\mathbf{0},\mathbf{1/4})\cup(\mathbf{3/4},\mathbf{1})$

c) $(4,8)$, $(\mathbf{1/2},\mathbf{3/4})$

d) $(8,32)$, $[\mathbf{0},\mathbf{1/4})\cup(\mathbf{3/4},\mathbf{1})$

12. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x)=\{\log_{32} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y. Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(4,8)$, $(\mathbf{2/5},\mathbf{3/5})$

b) $(16,64)$, $[\mathbf{0},\mathbf{1/5})\cup(\mathbf{4/5},\mathbf{1})$

c) $(4,128)$, $[\mathbf{0},\mathbf{2/5})\cup(\mathbf{2/5},\mathbf{1})$

d) $(1/2,2)$, $[\mathbf{0},\mathbf{1/5})\cup(\mathbf{4/5},\mathbf{1})$