W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Dla podanej liczby p podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną dodatnią a, że liczba a jest mniejsza od liczby a^2 o p%.

a) $p=40$, $a=\mathbf{5/3}$

b) $p=50$, $a=\mathbf{2}$

c) $p=60$, $a=\mathbf{5/2}$

d) $p=70$, $a=\mathbf{10/3}$

2. Dla podanych a, b zapisać w postaci przedziału otwartego lub uporządkowanej sumy przedziałów otwartych zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c.

a) $a=4$, $b=7$, $c\in(\mathbf{3},\mathbf{11})$

b) $a=3$, $b=7$, $c\in(\mathbf{4},\mathbf{10})$

c) $a=2$, $b=7$, $c\in(\mathbf{5},\mathbf{9})$

d) $a=1$, $b=7$, $c\in(\mathbf{6},\mathbf{8})$

3. Dla podanych a, b zapisać w postaci przedziału otwartego lub uporządkowanej sumy przedziałów otwartych zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości a, b, c.

a) $a=2$, $b=7$, $c\in\left(\mathbf{5},\sqrt{\mathbf{45}}\right)\cup\left(\sqrt{\mathbf{53}},\mathbf{9}\right)$

b) $a=1$, $b=7$, $c\in\left(\mathbf{6},\sqrt{\mathbf{48}}\right)\cup\left(\sqrt{\mathbf{50}},\mathbf{8}\right)$

c) $a=4$, $b=7$, $c\in\left(\mathbf{3},\sqrt{\mathbf{33}}\right)\cup\left(\sqrt{\mathbf{65}},\mathbf{11}\right)$

d) $a=3$, $b=7$, $c\in\left(\mathbf{4},\sqrt{\mathbf{40}}\right)\cup\left(\sqrt{\mathbf{58}},\mathbf{10}\right)$

4. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{13}$. Dla podanych a, b i c podać taką liczbę $d \neq c$, że trójkąty $A_aA_bA_c$ i $A_aA_bA_d$ mają równe pola.

a) $a=1$, $b=5$, $c=13$, $d=\mathbf{6}$

b) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\mathbf{13}$

c) $a=1$, $b=3$, $c=6$, $d=\mathbf{11}$

d) $a=1$, $b=4$, $c=10$, $d=\mathbf{8}$

5. Podać najmniejszą liczbę rzeczywistą dodatnią x spełniającą podane równanie, gdzie $\{z\}$ oznacza część ułamkową liczby z.

a) $x=\{3x\}$, $x=\mathbf{1/2}$

b) $2x=\{5x\}$, $x=\mathbf{1/3}$

c) $x=\{4x\}$, $x=\mathbf{1/3}$

d) $2x=\{6x\}$, $x=\mathbf{1/4}$

6. Dany jest 30-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{30}$. Dla podanych a i b podać takie liczby $c<d$, że czworokąt o wierzchołkach A_a, A_b, A_c i A_d (niekoniecznie leżących na obwodzie w tej kolejności) jest prostokątem.

a) $a=1$, $b=29$, $c=\mathbf{14}$, $d=\mathbf{16}$

b) $a=1$, $b=15$, $c=\mathbf{16}$, $d=\mathbf{30}$

c) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{16}$, $d=\mathbf{17}$

d) $a=1$, $b=3$, $c=\mathbf{16}$, $d=\mathbf{18}$

7. Dany jest 30-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{30}$. Dla podanych a i b podać takie liczby $c<d<e<f$, że sześciokąt o wierzchołkach A_a, A_b, A_c, A_d, A_e i A_f (niekoniecznie leżących na obwodzie w tej kolejności) jest równokątny.

a) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{11}$, $d=\mathbf{12}$, $e=\mathbf{21}$, $f=\mathbf{22}$

b) $a=1$, $b=3$, $c=\mathbf{11}$, $d=\mathbf{13}$, $e=\mathbf{21}$, $f=\mathbf{23}$

c) $a=1$, $b=29$, $c=\mathbf{9}$, $d=\mathbf{11}$, $e=\mathbf{19}$, $f=\mathbf{21}$

d) $a=1$, $b=15$, $c=\mathbf{5}$, $d=\mathbf{11}$, $e=\mathbf{21}$, $f=\mathbf{25}$

8. Dla podanej liczby x podać najmniejszą liczbę rzeczywistą $y>x$ spełniającą równość $\{\log_2\log_2 y\}=\{\log_2\log_2 x\}$, gdzie $\{z\}$ oznacza część ułamkową liczby z.

a) $x=9$, $y=\mathbf{81}$

b) $x=7$, $y=\mathbf{49}$

c) $x=5$, $y=\mathbf{25}$

d) $x=4$, $y=\mathbf{16}$

9. Dla podanej liczby x podać największą liczbę rzeczywistą $y<x$ spełniającą równość $\{\log_2\log_2 y\}=\{\log_2\log_2 x\}$, gdzie $\{z\}$ oznacza część ułamkową liczby z.

a) $x=9$, $y=\mathbf{3}$

b) $x=5$, $y=\sqrt{\mathbf{5}}$

c) $x=4$, $y=\mathbf{2}$

d) $x=7$, $y=\sqrt{\mathbf{7}}$

10. Podać najmniejszą taką liczbę naturalną $n \geqslant 3$, że spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać trzy wierzchołki wyznaczające trójkąt o kątach mających podane miary.

a) $45°$, $50°$, $85°$, $n = \mathbf{36}$

b) $40°$, $60°$, $80°$, $n = \mathbf{9}$

c) $10°$, $20°$, $150°$, $n = \mathbf{18}$

d) $30°$, $45°$, $105°$, $n = \mathbf{12}$

11. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $(\log_x 4+2)\cdot(\log_x 9+2)>0$, $\mathbf{(0,\ 1/3)\cup(1/2,\ 1)\cup(1,\ +\infty)}$

b) $(\log_x 4-2)\cdot(\log_x 9-2)>0$, $\mathbf{(0,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(3,\ +\infty)}$

c) $(\log_x 4+2)\cdot(\log_x 9-2)>0$, $\mathbf{(1/2,\ 1)\cup(1,\ 3)}$

d) $(\log_x 4-2)\cdot(\log_x 9+2)>0$, $\mathbf{(1/3,\ 1)\cup(1,\ 2)}$

12. To samo polecenie, co w zadaniu poprzednim.

a) $\log_x \log_x 27>1$, $\mathbf{(1,\ 3)}$

b) $\log_x \log_x 5<0$, $\mathbf{(5,\ +\infty)}$

c) $\log_x \log_x \sqrt{2}<-1$, $\mathbf{(2,\ 4)}$ - na skutek mojego błędu ten podpunkt wykracza poza materiał omawiany na Matematyce Elementarnej

d) $\log_x \log_x 16>2$, $\mathbf{(1,\ 2)}$

13. To samo polecenie, co w zadaniu poprzednim.

a) $\log_x \log_x 4>4$, $\left(\mathbf{1,\ \sqrt{2}}\right)$

b) $\log_x \log_x 216<2$, $\left(\mathbf{\sqrt{6},\ +\infty}\right)$

c) $\log_x \log_x 2>2$, $\left(\mathbf{1,\ \sqrt{2}}\right)$

d) $\log_x \log_x 16<6$, $\left(\mathbf{\sqrt{2},\ +\infty}\right)$