Na ćwiczeniach 6.10.2015 omawiamy test kwalifikacyjny.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

1. Sformułować uogólnione cechy podzielności (tzn. w postaci: liczba przy dzieleniu przez coś daje taką samą resztę, jaką daje ...) przez 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 25, 50, 125, 32.

2. Sformułować cechy podzielności przez 6, 12, 24, 15, 45, 18, 36.

3. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej suma cyfr jest równa 2013. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

4. To samo, jeżeli wiadomo, że suma cyfr jest równa 2014.

5. To samo, jeżeli wiadomo, że suma cyfr jest równa 2016.

6. O liczbie naturalnej wiadomo, że jej trzycyfrowa końcówka jest równa 120. Czy ta liczba może/musi być podzielna przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 27, 45, 75?

7. To samo, jeżeli wiadomo, że trzycyfrowa końcówka jest równa 124.

8. To samo, jeżeli wiadomo, że trzycyfrowa końcówka jest równa 125.

9. Obliczyć

a) $\mathrm{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$
b) $\mathrm{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$
c) $\mathrm{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$
d) $\mathrm{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$
e) $\mathrm{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$
f) $\mathrm{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$
g) $\mathrm{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$
h) $\mathrm{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$
i) $\mathrm{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$
j) $\mathrm{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

10. Dane są liczby naturalne m, n. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez ....

Ponadto, jeżeli ...., to dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez mn.

11. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d.

12. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

13. Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

14. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których liczba n^2-1 jest pierwsza.

15. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p+1$ jest pierwsza.

16. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

17. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m=12^n\ ?$$

18. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m\cdot 12^n=18^k\ ?$$

19. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m\cdot 24^n=12^k\ ?$$

20. Wskazać takie liczby naturalne m, n, że

$$m^3n^4=2^{11}\cdot 3^7\cdot 5^{13}\,.$$

21. Ile zer końcowych ma liczba 1000! ?

22. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

23. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

24. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

25. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2-n jest parzysta, liczba n^3-n jest podzielna przez 6, a liczba n^5-n jest podzielna przez 30.
Wskazówka: $n^5-n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+$coś.

26. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n.
a) liczba n jest nieparzysta
b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

27. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2013.

28. Niech $n!!=n(n-2)(n-4)...$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n. Ile zer końcowych mają liczby 34!! oraz 35!! ?

29. Jaka jest ostatnia cyfra liczby 37!! ?

30. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k, dla której podane wynikanie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m, n i (ewentualnie) r.
a) $3^k|mn \Rightarrow (3^3|m \vee 3^3|n)$
b) $5^k|mn \Rightarrow (5^2|m \vee 5^7|n)$
c) $7^k|mnr \Rightarrow (7^5|m \vee 7^3|n \vee 7^{12}|r)$
d) $4^k|mnr \Rightarrow (4^5|m \vee 4^3|n \vee 4^{12}|r)$
e) $6^k|mnr \Rightarrow (6^5|m \vee 6^3|n \vee 6^{12}|r)$

31. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I
Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.
Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II
Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.
Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III
Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.
Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV
Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.
Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V
Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.
Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.
Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI
Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.
Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.
Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

32. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2-2, \quad 3465^2-4, \quad 3465^2-8, \quad 3465^2-16, \quad 3465^2-32, \quad 3465^2-64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

33. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma sumę cyfr równą k. Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 5 jest *ładnych*. Które z podanych liczb są *ładne*?

34. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *fajną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której sześcian ma sumę cyfr równą k. Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 3 są *fajne*. Które z podanych liczb są *fajne*?

35. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d, to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d.
Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

36. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d^2, to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d.
Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

37. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, k, jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez d^2, to co najmniej jeden z czynników m, n, k jest podzielny przez d.
Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

38. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.
a) $(x+2)^2=x^2+\ldots$
b) $a^3+b^3=(a+b)\cdot\ldots$
c) $a^3-b^3=(a-b)\cdot\ldots$
d) $a^3\ldots b^3=(a^2+ab+b^2)\cdot\ldots$
e) $a^4\ldots b^4=(a+b)\cdot\ldots$
f) $a^4\ldots b^4=(a-b)\cdot\ldots$
g) $a^5\ldots b^5=(a+b)\cdot\ldots$
h) $a^5\ldots b^5=(a-b)\cdot\ldots$
i) $(a+b)^3=a^3+3\ldots$
j) $(a-b)^4=a^4-\ldots$
k) $(a-b)^5=a^5-\ldots$
l) $a^n-b^n=(a-b)\cdot\ldots$
m) $a^n+b^n=(a+b)\cdot\ldots$ - dla których n ?
n) $a^n-b^n=(a+b)\cdot\ldots$ - dla których n ?
o) $a^n+b^n=(a^2+b^2)\cdot\ldots$ - dla których n ?
p) $a^n-b^n=(a^2+b^2)\cdot\ldots$ - dla których n ?

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

39. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

40. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

41. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k, dla której liczba n jest podzielna przez 8^k.
a) $n=123456789200037^{37}$, $k=$........................ ;
b) $n=123456789200038^{40}$, $k=$........................ ;
c) $n=123456789200048^{45}$, $k=$........................ ;
d) $n=123456789200060^{50}$, $k=$........................ .

42. Podać największy wspólny dzielnik liczb

a) $\mathrm{NWD}(20!, 21^3) =$......................... ;

b) $\mathrm{NWD}(21!, 22^3) =$......................... ;

c) $\mathrm{NWD}(22!, 23^3) =$......................... ;

d) $\mathrm{NWD}(23!, 24^3) =$......................... .

43. Podać największy wspólny dzielnik.

a) $\mathrm{NWD}(1234000050, 900) =$......................... ;

b) $\mathrm{NWD}(1234000051, 900) =$......................... ;

c) $\mathrm{NWD}(1234000052, 900) =$......................... ;

d) $\mathrm{NWD}(1234000053, 900) =$......................... .

44. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k =$......................... ;

b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k =$......................... ;

c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k =$......................... ;

d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k =$......................... .

45. Wypisać w kolejności rosnącej wszystkie takie liczby naturalne n, że

a) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej .... ;

b) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest sześcianem liczby całkowitej .... ;

c) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest czwartą potęgą liczby całkowitej .... ;

d) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest piątą potęgą liczby całkowitej ....

46. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n, to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k.

a) $n = 2^9 \cdot 29$, $k =$......................... ;

b) $n = 3^7 \cdot 101$, $k =$......................... ;

c) $n = 3^5 \cdot 29$, $k =$......................... ;

d) $n = 5^5 \cdot 101$, $k =$......................... .

47. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

a) $2^{21} - 1$, ... ;

b) $3^{21} - 1$, ... ;

c) $3^{51} - 2^{51}$, ... ;

d) $3^{51} + 1$, ...

48. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geqslant k$, że $\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$

a) $k=2$, $n=$......................... ;

b) $k=3$, $n=$......................... ;

c) $k=4$, $n=$......................... ;

d) $k=5$, $n=$......................... .

49. Wiedząc, że $\binom{14}{4}=1001$, $\binom{14}{5}=2002$, $\binom{14}{6}=3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

a) $\binom{15}{5}=$......................... ;

b) $\binom{15}{6}=$......................... ;

c) $\binom{16}{6}=$......................... ;

d) $\binom{15}{10}=$......................... .

50. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n, aby zachodziła równość

$$\left(a^{a^k}\right)^{a^{a^k}} = a^{a^n} .$$

a) $a=5$, $k=2$, $n=$......................... ;

b) $a=3$, $k=3$, $n=$......................... ;

c) $a=2$, $k=5$, $n=$......................... ;

d) $a=3$, $k=4$, $n=$......................... .

51. W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ o sumie 90, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w.

Dla podanej liczby n podać liczbę w, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli liczba w o żądanej własności nie istnieje.

a) $n=5$, $w=$......................... ;

b) $n=9$, $w=$......................... ;

c) $n=10$, $w=$......................... ;

d) $n=15$, $w=$......................... .

52. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2, w którym występuje wyraz równy 1.

a) $n=3$, ... ;

b) $n=4$, ... ;

c) $n=5$, ... ;

d) $n=7$, ...

53. Zapisać podane sumy w postaci ułamka dziesiętnego z przybliżeniem do 100 miejsc po przecinku:

a) $\sum_{n=1}^{2015} \frac{1}{2^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{2015} \frac{1}{3^n}$ **c)** $\sum_{n=1}^{2015} \frac{1}{4^n}$ **d)** $\sum_{n=1}^{2015} \frac{1}{6^n}$ **e)** $\sum_{n=1}^{2015} \frac{(-1)^n}{9^n}$