

Na ćwiczeniach 10.11.2015 omawiamy kolokwium 2 (także wersję E).

Rozwiązać nierówności:

54.  $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$  55.  $\sqrt{x^2+27} > 2x$   
 56.  $\sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2007} + 2007$  57.  $|||x|-1|-1|-1|-1|-1| \leq \frac{1}{2}$   
 58.  $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$  59.  $|x^2-25| < 24$   
 60.  $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$  61.  $(x+5)^{2015} + (x+5)^7 < (3x+1)^{2015} + (3x+1)^7$   
 62.  $(x^2+1)^{x+2} < (x^2+1)^{x^2}$  63.  $(x^2+x+1)^{3x} \geq (x^2+x+1)^{x+1}$

Uprościć wyrażenia

64.  $4^{2+\log_2 7}$  65.  $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$  66.  $\log_6 2 + \log_{36} 9$   
 67.  $\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  większych od 1.  
 68.  $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$  69.  $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

70. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać możliwie wiele istotnie różnych przykładów)?

- a)  $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$   
 b)  $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$   
 c)  $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$   
 d)  $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$   
 e)  $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$   
 f)  $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

71. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- a)  $\log_2 7$  czy  $\log_3 7$   
 b)  $\log_{0,2} 7$  czy  $\log_{0,3} 7$   
 c)  $\log_2 7$  czy  $\log_{0,3} 7$   
 d)  $\log_{0,2} 7$  czy  $\log_3 7$   
 e)  $\log_2 0,7$  czy  $\log_3 0,7$   
 f)  $\log_{0,2} 0,7$  czy  $\log_{0,3} 0,7$   
 g)  $\log_2 0,7$  czy  $\log_{0,3} 0,7$   
 h)  $\log_{0,2} 0,7$  czy  $\log_3 0,7$   
 i)  $\log_9 27$  czy  $\log_4 8$   
 j)  $\log_3 8$  czy  $\log_2 5$   
 k)  $\log_5 127$  czy  $\log_{10} 999$   
 l)  $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$  czy  $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$   
 m)  $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$  czy  $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$   
 n)  $\log_2 3$  czy  $\log_3 5$   
 o)  $\log_3 7$  czy  $\log_5 19$

**Wskazówka do niektórych pytań:**

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

Rozwiązać nierówności:

**72.**  $\log_{2x}(x^2 + 1) \leq \log_{2x}(x^2 + 3x)$

**73.**  $\log_2 x + \log_x 4 < 3$

**74.**  $\log_x 3 \leq 2$

**75.** Na potrzeby tego zadania, dla liczby rzeczywistej  $a > 1$  zdefiniujemy średnią liczb rzeczywistych  $x, y$  większych od 1, następującym wzorem

$$S_a(x, y) = a^{\sqrt{\log_a x \cdot \log_a y}}.$$

Podać wartości następujących liczb w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego w przypadku liczb wymiernych. Wpisać literkę **N** w przypadku liczb niewymiernych.

a)  $S_8(2, 16) = \dots\dots\dots$ ;

b)  $S_9(2, 16) = \dots\dots\dots$ ;

c)  $S_8(3, 81) = \dots\dots\dots$ ;

d)  $S_9(3, 81) = \dots\dots\dots$ .

**Oznaczenia:** Przypominam, że  $[x]$  oraz  $\{x\}$  oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej  $x$ .

**76.** Podać przykład takiej liczby rzeczywistej niecałkowitej  $x$ , że

a)  $[x] = -4, \{x\} < 1/10,$

b)  $[x] = -4, \{x\} > 9/10,$

c)  $2 \cdot \{x\} \neq \{2x\}, x < 0,$

d)  $2 \cdot \{x\} = \{5x\}, x > 10.$

**77.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste  $a$ , że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi równość  $[x + a] = [x] + a$ .

**78.** Podać przykład takich niecałkowitych liczb rzeczywistych  $x, y$ , że

a)  $[x + y] \neq [x] + [y]$

b)  $[2x + y] = 2[x] + [y] + 2$

c)  $[x + y] = \{x\} + \{y\}, x, y > 0$

d)  $[xy] = [x] \cdot [y] + 10$

**79.** Uporządkować podane liczby w kolejności niemalejącej.  
 $\sin 50^\circ, \cos 80^\circ, \sin 170^\circ, \cos 200^\circ, \sin 250^\circ, \cos 280^\circ.$

**80.** Naszkicować wykres funkcji  $f$  zdefiniowanej wzorem

a)  $f(x) = \sin 2x$

b)  $f(x) = \cos(x/2)$

c)  $f(x) = \sin^2 x$

d)  $f(x) = \cos^2 x$

e)  $f(x) = (1 + \cos 2x)/2$

f)  $f(x) = (1 - \cos 2x)/2$

**81.** Która liczba jest większa?

a)  $\sin 1^\circ$  czy  $\sin 1$

b)  $\sin 2^\circ$  czy  $\sin 2$

c)  $\sin 3^\circ$  czy  $\sin 3$

d)  $\sin 4^\circ$  czy  $\sin 4$

e)  $\sin 5^\circ$  czy  $\sin 5$

f)  $\sin 6^\circ$  czy  $\sin 6$

**82.** Uprościć wyrażenie, w którym  $n$  przebiega liczby naturalne.

- a)  $\sin n\pi$
- b)  $\sin n^2\pi$
- c)  $\cos n\pi$
- d)  $\cos n^3\pi$
- e)  $\cos(n^2 + n)\pi$
- f)  $\sin((2n + 1)\pi/2)$
- g)  $\sin((2n - 1)\pi/2)$

Dopuszczalne odpowiedzi: 1, 0,  $(-1)^n$ ,  $(-1)^{n+1}$ .

**83.** Rozwiązać równania i nierówności.

- a)  $\sin x \geq 1/2$
- b)  $\cos x \leq 1/2$
- c)  $\sin x \geq \cos x$
- d)  $[4\sin^2 x] = 2$
- e)  $\{\cos^2 x\} = 3/4$
- f)  $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \cdot \cos(x/2)$
- g)  $\sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$

**84.** Jaką najmniejszą i największą wartość przyjmuje wyrażenie

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x ?$$

**85.** Dla funkcji  $f$  zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru  $Z$  rozstrzygnąć, czy funkcja  $f$  jest różnowartościowa na zbiorze  $Z$  oraz podać zbiór wartości funkcji  $f$  na zbiorze  $Z$ .

- a)  $f(x) = x^2$ ,  $Z = [-3, -1)$
- b)  $f(x) = x^2$ ,  $Z = (-3, 4]$
- c)  $f(x) = x^2$ ,  $Z = [-3, -2] \cup [3, 5]$
- d)  $f(x) = x^2$ ,  $Z = (-3, -2] \cup [3, 4)$
- e)  $f(x) = x^2$ ,  $Z = (0, 3)$
- f)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $Z = (0, 3)$
- g)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ,  $Z = (0, 3)$
- h)  $f(x) = 2^x$ ,  $Z = (-3, 3)$
- i)  $f(x) = |2^x - 3|$ ,  $Z = (-3, 3)$
- j)  $f(x) = |2^x - 5|$ ,  $Z = (-3, 3)$

**86.** Naszkicować wykres funkcji  $f$  zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \left| \left[ x + \frac{1}{2} \right] - x \right|.$$

**87.** Czy funkcja  $f$  zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

- a)  $f(x) = 0$
- b)  $f(x) = 37$
- c)  $f(x) = 2x$
- d)  $f(x) = 2x^2 + 1$
- e)  $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- f)  $f(x) = x^6 + x^5$

- g)  $f(x) = \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$   
 h)  $f(x) = \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$   
 i)  $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$   
 j)  $f(x) = x^{111} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$   
 k)  $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{24} x \cdot \cos^{37} x$   
 l)  $f(x) = x^{666} \cdot \sin^{37} x \cdot \cos^{24} x$   
 m)  $f(x) = \sin x^{37}$   
 n)  $f(x) = \sin x^{24}$   
 o)  $f(x) = \cos x^{37}$   
 p)  $f(x) = \cos x^{24}$   
 q)  $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$   
 r)  $f(x) = (x^2 + 1)\cos x$   
 s)  $f(x) = (x^3 + 1)\sin x$   
 t)  $f(x) = (x^3 + 1)\cos x$

**88.** Dla każdej z liczb  $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$  wskazać taką liczbę  $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$ , że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi równość  $f_j(f_i(x)) = x$ .

$$f_1(x) = 37 + x$$

$$f_2(x) = 37 - x$$

$$f_3(x) = x - 37$$

$$f_4(x) = 3x - 2$$

$$f_5(x) = 3x - 4$$

$$f_6(x) = 3x - 6$$

$$f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

**89.** Funkcja  $f$  spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ . Dowieść, że funkcja  $f$  jest okresowa i parzysta.

Podać dwa rozwiązania: jedno oparte na manipulowaniu wzorkami, a jedno interpretujące wymienione w treści zadania własności jako niezmienniczość wykresu funkcji  $f$  na pewne izometrie płaszczyzny.

**Zadania powtórzeniowe do samodzielnego rozwiązania. Jeżeli czas pozwoli, wskazane przez studentów zadania mogą być omówione na ćwiczeniach.**

**90.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0$ , ..... ;  
 b)  $(x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0$ , ..... ;  
 c)  $(x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3) > 0$ , ..... ;  
 d)  $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^2 > 0$ , .....

**91.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(x-1)^{2013} \cdot (x-2)^{2013} > 0$ , ..... ;  
 b)  $(x-1)^{2013} \cdot (x-2)^{2014} > 0$ , ..... ;  
 c)  $(x-1)^{2014} \cdot (x-2)^{2013} > 0$ , ..... ;  
 d)  $(x-1)^{2014} \cdot (x-2)^{2014} > 0$ , .....

**92.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(|x|-1)^{2013} \cdot (|x|-2)^{2013} > 0$ , ..... ;  
 b)  $(|x|-1)^{2013} \cdot (|x|-2)^{2014} > 0$ , ..... ;  
 c)  $(|x|-1)^{2014} \cdot (|x|-2)^{2013} > 0$ , ..... ;  
 d)  $(|x|-1)^{2014} \cdot (|x|-2)^{2014} > 0$ , .....

**93.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $|x-3| < 1$ , ..... ;  
 b)  $|x-4| > 2$ , ..... ;  
 c)  $|x-5| > 6$ , ..... ;  
 d)  $|x-6| < 5$ , .....

**94.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $|x^2 - 17| < 8$ , ..... ;  
 b)  $|x^3 - 14| < 13$ , ..... ;  
 c)  $|x^4 - 40| < 41$ , ..... ;  
 d)  $|x^5 - 16| < 16$ , .....

**95.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(x-1)(x-2) < 0$ , ..... ;  
 b)  $(x-2)(x-4)^2 < 0$ , ..... ;  
 c)  $(x-4)^2(x-7) < 0$ , ..... ;  
 d)  $(x-7)^2(x-9)^2 > 0$ , .....

**96.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(x^2 - 1)(x - 2) < 0$ , ..... ;  
 b)  $(x - 2)(x^2 - 4) < 0$ , ..... ;  
 c)  $(x^2 - 4)(x - 7)^2 < 0$ , ..... ;  
 d)  $(x - 7)(x^2 - 9)^2 < 0$ , .....

**97.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(x - 4)(x - 9) > 0$ , ..... ;  
 b)  $(x - 4)(x^2 - 9) > 0$ , ..... ;  
 c)  $(x^2 - 4)(x - 9) > 0$ , ..... ;  
 d)  $(x^2 - 4)(x^2 - 9) > 0$ , .....

**98.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(x^2 - 25) \cdot (x^3 - 27) > 0$ , ..... ;  
 b)  $(x^5 - 32) \cdot (x^3 - 27) > 0$ , ..... ;  
 c)  $(x^5 - 32) \cdot (x^4 - 16) > 0$ , ..... ;  
 d)  $(x^2 - 25) \cdot (x^4 - 16) > 0$ , .....

**99.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(|\log_5 x| - 1)^2 < 1$ , ..... ;  
 b)  $(|\log_5 x| - 1)^3 < 1$ , ..... ;  
 c)  $(|\log_5 x| - 2)^4 > 1$ , ..... ;  
 d)  $(|\log_5 x| - 2)^5 > 1$ , .....

**100.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $(\log_2 x - 2) \cdot (\log_3 x - 3) > 0$ , ..... ;  
 b)  $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_3 x - 2) > 0$ , ..... ;  
 c)  $(\log_2 x - 3)^3 \cdot (\log_3 x - 2)^2 > 0$ , ..... ;  
 d)  $(\log_2 x - 3)^2 \cdot (\log_3 x - 2)^3 > 0$ , .....

**101.** Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a)  $\log_x 4 < 2$ , ..... ;  
 b)  $\log_x 4 < -2$ , ..... ;  
 c)  $\log_x 2 > 2$ , ..... ;  
 d)  $\log_x 2 > -1$ , .....

**102.** Podać taką liczbę  $x$ , że

- a)  $\log_2 3 = 2 \cdot \log_2 x$ ,  $x = \dots$  ;  
 b)  $\log_2 3 = 2 + \log_2 x$ ,  $x = \dots$  ;  
 c)  $3 \cdot \log_3 2 = \log_3 x$ ,  $x = \dots$  ;  
 d)  $3 + \log_3 2 = \log_3 x$ ,  $x = \dots$  .

**103.** Niech  $A(n) = 4^{4^n}$ ,  $B(n) = 256^{16^n}$ ,  $C(n) = \log_2 A(n)$ ,  $D(n) = \log_2 B(n)$ ,  
 $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$ . Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a)  $E(100) = \dots$  ;  
 b)  $E(200) = \dots$  ;  
 c)  $E(300) = \dots$  ;  
 d)  $E(400) = \dots$  .

**104.** Niech  $A(n) = 4^{4^n}$ ,  $B(n) = 256^{64^n}$ ,  $C(n) = \log_2 A(n)$ ,  $D(n) = \log_2 B(n)$ ,  
 $E(n) = \log_{C(n)} D(n)$ . Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego:

- a)  $E(100) = \dots$  ;  
 b)  $E(200) = \dots$  ;  
 c)  $E(300) = \dots$  ;  
 d)  $E(400) = \dots$  .

**105.** Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, gdy podana liczba jest wymierna. Napisać  $\mathbf{N}$ , jeśli podana liczba jest niewymierna.

- a)  $\log_2 \log_2 4^{4^4} = \dots$  ;  
 b)  $\log_2 \log_2 4^{4^5} = \dots$  ;  
 c)  $\log_2 \log_2 4^{4^6} = \dots$  ;  
 d)  $\log_2 \log_2 4^{4^8} = \dots$  .

**106.** Dla podanej liczby  $a$  wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią  $b$ , aby spełniona była równość  $1 + (\log_5 a) + \log_5 b = \log_5 (2a^2 + 2b^2)$ .

- a)  $a = 2$ ,  $b = \dots$  ;  
 b)  $a = 3$ ,  $b = \dots$  ;  
 c)  $a = 4$ ,  $b = \dots$  ;  
 d)  $a = 6$ ,  $b = \dots$  .

**107.** Dla podanych liczb  $a, b$  podać taką liczbę rzeczywistą  $c$ , aby zachodziła równość  $\log_a b = \log_b c$ .

- a)  $a = 3$ ,  $b = 9$ ,  $c = \dots$  ;  
 b)  $a = 9$ ,  $b = 3$ ,  $c = \dots$  ;  
 c)  $a = 5^4$ ,  $b = 5^6$ ,  $c = \dots$  ;  
 d)  $a = 7^{5^4}$ ,  $b = 7^{5^6}$ ,  $c = \dots$  .

**108.** Dla podanych liczb  $a, b$  zapisać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość liczby  $\log_x y$ , gdzie  $x = \log_a b$  oraz  $y = \log_b a$ . Napisać literkę **N**, jeżeli liczba ta jest niewymierna.

- a)  $a = 2^{2^4}$ ,  $b = 2^{2^6}$ ,  $\log_x y = \dots\dots\dots$ ;  
 b)  $a = 2^{2^7}$ ,  $b = 2^{2^{14}}$ ,  $\log_x y = \dots\dots\dots$ ;  
 c)  $a = 2^{2^9}$ ,  $b = 2^{2^{12}}$ ,  $\log_x y = \dots\dots\dots$ ;  
 d)  $a = 2^{2^{16}}$ ,  $b = 2^{2^{32}}$ ,  $\log_x y = \dots\dots\dots$ .

**109.** Niech  $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ .

Zapisać wartość podanego iloczynu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

- a)  $\prod_{i=1}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$ ;  
 b)  $\prod_{i=2}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$ ;  
 c)  $\prod_{i=2}^{15} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$ ;  
 d)  $\prod_{i=2}^{16} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots\dots\dots$ .

**110.** Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a)  $-\frac{1}{2} < \log_4 x < \frac{3}{2}$  .....;  
 b)  $\frac{1}{3} < \log_{64} x < \frac{1}{2}$  .....;  
 c)  $-\frac{3}{5} < \log_{32} x < \frac{4}{5}$  .....;  
 d)  $-\frac{3}{2} < \log_9 x < \frac{1}{4}$  .....

**111.** Podać zbiór rozwiązań nierówności zapisując go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a)  $\frac{1}{2} < \log_x 8 < 3$  .....;  
 b)  $-\frac{1}{2} < \log_x 9 < 2$  .....;  
 c)  $-2 < \log_x 4 < \frac{1}{3}$  .....;  
 d)  $-3 < \log_x 64 < -2$  .....

**Odpowiedzi do zadań powtórzeniowych znajdują się na stronie przedmiotu.**