

Na ćwiczeniach 15.12.2015 omawiamy kolokwium 4 (także wersję E).

112. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

113. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

114. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

115. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB .

116. W trapezie o wysokości 9 ramiona mają długości 15 i 41, a dolna podstawa ma długość 60. Jaka jest długość górnej podstawy?

117. Niech $0 < a \leq b \leq c$. Dokończyć i uzasadnić:

a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...

b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 120° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 60° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

118. W trójkącie o bokach podanej długości wskazać kąt, którego miara wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą.

a) 3, 4, 5

b) 3, 5, 7

c) 3, 7, 8

119. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $p = 12, r = 1, S = 6$

b) $p = 16, r = 2, S = 18$

c) $p = 20, r = 3, S = 30$

d) $p = 24, r = 4, S = 50$

e) $p = 28, r = 5, S = 70$

120. Jeśli w poprzednim zadaniu udzielił(a/e)ś 3 odpowiedzi TAK i 2 odpowiedzi NIE, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

121. Dany jest taki czworokąt wypukły $ABCD$, że wierzchołki A i C , środek przekątnej BD oraz środki okręgów opisanych na trójkątach ABD i CBD leżą na jednej prostej. Udowodnić, że

$$AB^{2015} + BC^{2015} = AD^{2015} + DC^{2015}.$$

122. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

a) A_1A_7, A_3A_9

b) A_1A_5, A_2A_8

c) A_1A_5, A_3A_7

d) A_1A_6, A_4A_9

123. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

- a) w czworokąt można wpisać okrąg
- b) na czworokącie można opisać okrąg
- c) czworokąt jest równoległobokiem
- d) czworokąt jest rombem
- e) czworokąt jest prostokątem
- f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
- g) sumy długości przeciwległych boków są równe
- h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- k) przekątne są prostopadłe
- l) przekątne dzielą się na połowy

124. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

- a) $A_1A_2A_4A_9$
- b) $A_1A_3A_7A_{11}$
- c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
- d) $A_1A_6A_9A_{10}$
- e) $A_1A_4A_6A_{11}$
- f) $A_1A_2A_3A_9$
- g) $A_1A_6A_8A_{11}$
- h) $A_1A_3A_4A_8$

Które czworokąty mają równe pola?

125. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

126. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e.$$

127. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)¹ na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)¹.

128. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

- a) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- b) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
- c) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- d) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

129. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C , że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB ?$$

¹niepotrzebne skreślić

Zadania powtórzeniowo-uzupełniające do samodzielnego rozwiązania. Jeżeli czas pozwoli, wskazane przez studentów zadania mogą być omówione na ćwiczeniach.

130. Po zmieszaniu litra roztworu pewnej substancji o stężeniu $p\%$ z dwoma litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $q\%$ otrzymamy roztwór o stężeniu $r\%$. Dla podanych p i q podaj takie r , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $p = 10, \quad q = 70, \quad r = \dots\dots\dots$;
- b) $p = 30, \quad q = 60, \quad r = \dots\dots\dots$;
- c) $p = 20, \quad q = 50, \quad r = \dots\dots\dots$;
- d) $p = 20, \quad q = 80, \quad r = \dots\dots\dots$.

131. Po zmieszaniu litra roztworu pewnej substancji o stężeniu $p\%$ z litrem roztworu tejże substancji o stężeniu $q\%$ otrzymamy roztwór o stężeniu $r\%$. Dla podanych p i r podaj takie q , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $p = 10, \quad r = 30, \quad q = \dots\dots\dots$;
- b) $p = 20, \quad r = 30, \quad q = \dots\dots\dots$;
- c) $p = 30, \quad r = 20, \quad q = \dots\dots\dots$;
- d) $p = 20, \quad r = 40, \quad q = \dots\dots\dots$.

132. Jeżeli pole powierzchni całkowitej sześcianu S jest większe od pola powierzchni całkowitej sześcianu T o $p\%$, to objętość sześcianu S jest większa od objętości sześcianu T o $q\%$. Dla podanej liczby p podać taką liczbę naturalną q , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $p = 300, \quad q = \dots\dots\dots$;
- b) $p = 800, \quad q = \dots\dots\dots$;
- c) $p = 1500, \quad q = \dots\dots\dots$;
- d) $p = 2400, \quad q = \dots\dots\dots$.

133. Dla podanych liczb p, q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a, b , że liczba a stanowi $p\%$ iloczynu ab , a liczba b stanowi $q\%$ iloczynu ab .

- a) $p = 40, \quad q = 60, \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$;
- b) $p = 25, \quad q = 75, \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$;
- c) $p = 20, \quad q = 80, \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$;
- d) $p = 25, \quad q = 80, \quad a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots$.

134. Liczbę naturalną p nazwiemy *klawą*, jeżeli istnieją takie liczby naturalne m, n , że liczba m^2 jest mniejsza od liczby n^2 o $p\%$. Dla podanej liczby k wskazać najmniejszą liczbę *klawą* $p > k$.

- a) $k = 11, \quad p = \dots\dots\dots$;
- b) $k = 22, \quad p = \dots\dots\dots$;
- c) $k = 44, \quad p = \dots\dots\dots$;
- d) $k = 66, \quad p = \dots\dots\dots$.

135. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^3\right)!\right)\right] = \dots\dots\dots$;
 b) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^5\right)!\right)\right] = \dots\dots\dots$;
 c) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^{10}\right)!\right)\right] = \dots\dots\dots$;
 d) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^{20}\right)!\right)\right] = \dots\dots\dots$.

136. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $\left[\log_2\log_213^7\right] = \dots\dots\dots$;
 b) $\left[\log_2\log_213^{11}\right] = \dots\dots\dots$;
 c) $\left[\log_2\log_213^{15}\right] = \dots\dots\dots$;
 d) $\left[\log_2\log_213^{25}\right] = \dots\dots\dots$.

137. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

- a) $\log_x(\sqrt{2}-1) > -1$, $\dots\dots\dots$;
 b) $\log_x(2-\sqrt{3}) > -1$, $\dots\dots\dots$;
 c) $\log_x(\sqrt{5}-2) < -1$, $\dots\dots\dots$;
 d) $\log_x(3-\sqrt{8}) < -1$, $\dots\dots\dots$.

138. Istnieje **rosnący** postęp arytmetyczny czterowyrazowy a_1, a_2, a_3, a_4 o sumie 360 i jednym z wyrazów równym x , którego pierwszy wyraz a_1 jest równy w . Dla podanej liczby x podać zbiór **wszystkich** liczb rzeczywistych w , dla których powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $x = 30$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 b) $x = 60$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 c) $x = 120$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 d) $x = 180$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$.

139. Istnieje **rosnący** postęp arytmetyczny czterowyrazowy a_1, a_2, a_3, a_4 o sumie 360 i jednym z wyrazów równym x , którego drugi wyraz a_2 jest równy w . Dla podanej liczby x podać zbiór **wszystkich** liczb rzeczywistych w , dla których powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $x = 30$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 b) $x = 60$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 c) $x = 120$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$;
 d) $x = 180$, $w \in \{ \dots\dots\dots \}$.

140. Suma trójwyrazowego postępu geometrycznego a_1, a_2, a_3 o ilorazie q jest równa 91. Dla podanego ilorazu q podaj środkowy wyraz a_2 .

- a) $q = 2$, $a_2 = \dots$;
 b) $q = 3$, $a_2 = \dots$;
 c) $q = 1/2$, $a_2 = \dots$;
 d) $q = 1/3$, $a_2 = \dots$.

141. Liczbę naturalną q nazwiemy *fajniutką*, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p oraz liczba naturalna n , że liczba n jest większa od p o $q\%$.

Dla podanej liczby k podać najmniejszą *fajniutką* liczbę q większą od k .

- a) $k = 222$, $q = \dots$;
 b) $k = 333$, $q = \dots$;
 c) $k = 444$, $q = \dots$;
 d) $k = 555$, $q = \dots$.

142. Dla podanych a, b zapisać w postaci przedziału otwartego lub uporządkowanej sumy przedziałów otwartych zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c , że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c .

- a) $a = 1$, $b = 3$, $c \in \dots$;
 b) $a = 2$, $b = 3$, $c \in \dots$;
 c) $a = 3$, $b = 7$, $c \in \dots$;
 d) $a = 4$, $b = 7$, $c \in \dots$.

143. Dla podanych a, b zapisać w postaci przedziału otwartego lub uporządkowanej sumy przedziałów otwartych zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c , że istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości a, b, c .

- a) $a = 1$, $b = 3$, $c \in \dots$;
 b) $a = 2$, $b = 3$, $c \in \dots$;
 c) $a = 3$, $b = 7$, $c \in \dots$;
 d) $a = 4$, $b = 7$, $c \in \dots$.

144. Dany jest 20-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{20}$. Podać miarę kąta

- a) $\sphericalangle A_6A_{17}A_7 = \dots$;
 b) $\sphericalangle A_6A_7A_{17} = \dots$;
 c) $\sphericalangle A_6A_2A_{17} = \dots$;
 d) $\sphericalangle A_6A_{20}A_{17} = \dots$.

- 145.** Dany jest n -kąt foremny $A_1A_2\dots A_n$. Podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_2A_4$, jeżeli
- $n=6$,
 - $n=9$,
 - $n=18$,
 - $n=27$,

- 146.** Dany jest piętnastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych liczb m, n podać **wszystkie** takie liczby k , że trójkąt $A_mA_nA_k$ ma co najmniej jeden kąt o mierze 60°
- $m=1, n=4, k \in \{\dots\}$;
 - $m=1, n=5, k \in \{\dots\}$;
 - $m=1, n=8, k \in \{\dots\}$;
 - $m=1, n=10, k \in \{\dots\}$.

147. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

- $\sphericalangle ABC = 50^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$;
- $\sphericalangle ABC = 80^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$;
- $\sphericalangle ABC = 100^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$;
- $\sphericalangle ABC = 150^\circ, \sphericalangle AOC = \dots$.

148. Uzupełnij dane dotyczące n -kąta foremnego, gdzie LP jest liczbą przekątnych, a MKW miarą kąta wewnętrznego.

- $n=6, LP = \dots, MKW = \dots$;
- $n = \dots, LP = \dots, MKW = 140^\circ$;
- $n = \dots, LP = \dots, MKW = 150^\circ$;
- $n = \dots, LP = 170, MKW = \dots$.

149. Dla podanej liczby naturalnej a podać takie liczby całkowite dodatnie b, c , że trójkąt o bokach długości a, b, c jest prostokątny, a przy tym c jest długością jego przeciwprostokątnej.

- $a=3, b = \dots, c = \dots$;
- $a=5, b = \dots, c = \dots$;
- $a=7, b = \dots, c = \dots$;
- $a=9, b = \dots, c = \dots$.

150. Dany jest 15-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych x, y, z, s wskazać takie t , że pięciokąt wypukły o wierzchołkach A_x, A_y, A_z, A_s, A_t (niekoniecznie leżących na obwodzie pięciokąta w tej kolejności) ma pole równe polu pięciokąta $A_1A_3A_6A_{10}A_{15}$.

- $x=1, y=4, z=5, s=7, t = \dots$;
- $x=1, y=4, z=8, s=11, t = \dots$;
- $x=1, y=6, z=11, s=12, t = \dots$;
- $x=1, y=6, z=11, s=13, t = \dots$.

151. Dany jest n -kąąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Podać liczbę jego przekątnych krótszych od 1.

- a) $n = 12$, liczba przekątnych krótszych od 1: ;
 b) $n = 17$, liczba przekątnych krótszych od 1: ;
 c) $n = 25$, liczba przekątnych krótszych od 1: ;
 d) $n = 42$, liczba przekątnych krótszych od 1:

152. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby istniał czworokąt wypukły o bokach długości (z zachowaniem kolejności) a, b, c, d , w którym przekątne są prostopadłe. Napisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba d o żądanej własności nie istnieje.

- a) $a = 1, b = 5, c = 7, d = \dots\dots\dots$;
 b) $a = 1, b = 4, c = 8, d = \dots\dots\dots$;
 c) $a = 4, b = 9, c = 8, d = \dots\dots\dots$;
 d) $a = 5, b = 11, c = 10, d = \dots\dots\dots$.

153. Istnieje czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d (z zachowaniem kolejności), w który można wpisać okrąg. Dla podanych a, b, c podać takie d , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie d nie istnieje.

- a) $a = 3, b = 4, c = 7, d = \dots\dots\dots$;
 b) $a = 5, b = 6, c = 7, d = \dots\dots\dots$;
 c) $a = 7, b = 13, c = 7, d = \dots\dots\dots$;
 d) $a = 4, b = 10, c = 5, d = \dots\dots\dots$.

154. Istnieje czworokąt wypukły o kątach miary $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (z zachowaniem kolejności), na którym można opisać okrąg. Dla podanych α, β podać takie γ, δ , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie γ, δ nie istnieją.

- a) $\alpha = 10^\circ, \beta = 177^\circ, \gamma = \dots\dots\dots, \delta = \dots\dots\dots$;
 b) $\alpha = 20^\circ, \beta = 50^\circ, \gamma = \dots\dots\dots, \delta = \dots\dots\dots$;
 c) $\alpha = 40^\circ, \beta = 140^\circ, \gamma = \dots\dots\dots, \delta = \dots\dots\dots$;
 d) $\alpha = 80^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = \dots\dots\dots, \delta = \dots\dots\dots$.

155. W okrąg o promieniu 1 wpisano n -kąąt foremny. Ile przekątnych tego n -kąta ma długość będącą liczbą całkowitą?

- a) Dla $n = 6$ takich przekątnych jest ;
 b) Dla $n = 12$ takich przekątnych jest ;
 c) Dla $n = 20$ takich przekątnych jest ;
 d) Dla $n = 30$ takich przekątnych jest

156. Czy nierówność $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 7\alpha \cdot \cos 15\alpha \cdot \cos 71\alpha > 0$ jest prawdziwa dla

- a) $\alpha = 1^\circ$;
 b) $\alpha = 2^\circ$;
 c) $\alpha = 3^\circ$;
 d) $\alpha = 4^\circ$?

157. Rozważamy 100-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{100}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k \leq 100$, różnych od m, n , że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

- a) $m = 1, n = 2, k \in \{ \dots \}$;
 b) $m = 17, n = 29, k \in \{ \dots \}$;
 c) $m = 44, n = 66, k \in \{ \dots \}$;
 d) $m = 50, n = 75, k \in \{ \dots \}$?

158. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości

- a) 5, 5, 9 ;
 b) 5, 5, 11 ;
 c) 5, 9, 9 ;
 d) 5, 11, 11 ?

159. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości

- a) 10, 20, 29 ;
 b) 10, 20, 31 ;
 c) 10, 11, 20 ;
 d) 10, 11, 100 ?

160. W okrąg o promieniu R wpisano taki czworokąt $ABCD$, że $AB = BC = a$ oraz $CD = DA = b$. Podać wzór na R w zależności od a i b . Wzór nie może zawierać funkcji trygonometrycznych.

$R = \dots$

161. W okrąg o promieniu R wpisano taki sześciokąt $ABCDEF$, że $AB = BC = CD = a$ oraz $DE = EF = FA = b$. Podać wzór (**bez funkcji trygonometrycznych**) na R w zależności od a i b .

$R = \dots$

162. W okrąg o promieniu R wpisano taki ośmiokąt $ABCDEFGH$, że $AB = BC = CD = DE = a$ oraz $EF = FG = GH = HA = b$. Uzupełnić wzór na R w zależności od a i b , wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R = \sqrt{\dots \cdot a^2 + \dots \cdot ab + \dots \cdot b^2}$$

163. W okrąg o promieniu R wpisany jest taki dwunastokąt $ABCDEFGHIJKL$, że $AB = BC = CD = DE = EF = FG = a$ oraz $GH = HI = IJ = JK = KL = LA = b$. Uzupełnić wzór na R w zależności od a i b , wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R = \sqrt{\dots \cdot a^2 + \dots \cdot ab + \dots \cdot b^2}$$

Na kolokwiach 5 i 6 obowiązuje materiał od początku semestru.

Odpowiedzi do zadań powtórzeniowo-uzupełniających znajdują się na stronie przedmiotu.