130. Po zmieszaniu litra roztworu pewnej substancji o stężeniu $p\%$ z dwoma litrami roztworu tejże substancji o stężeniu $q\%$ otrzymamy roztwór o stężeniu $r\%$. Dla podanych p i q podaj takie r, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $p=10$, $q=70$, $r=\mathbf{50}$;

b) $p=30$, $q=60$, $r=\mathbf{50}$;

c) $p=20$, $q=50$, $r=\mathbf{40}$;

d) $p=20$, $q=80$, $r=\mathbf{60}$.

131. Po zmieszaniu litra roztworu pewnej substancji o stężeniu $p\%$ z litrem roztworu tejże substancji o stężeniu $q\%$ otrzymamy roztwór o stężeniu $r\%$. Dla podanych p i r podaj takie q, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $p=10$, $r=30$, $q=\mathbf{50}$;

b) $p=20$, $r=30$, $q=\mathbf{40}$;

c) $p=30$, $r=20$, $q=\mathbf{10}$;

d) $p=20$, $r=40$, $q=\mathbf{60}$.

132. Jeżeli pole powierzchni całkowitej sześcianu S jest większe od pola powierzchni całkowitej sześcianu T o $p\%$, to objętość sześcianu S jest większa od objętości sześcianu T o $q\%$. Dla podanej liczby p podać taką liczbę naturalną q, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $p=300$, $q=\mathbf{700}$;

b) $p=800$, $q=\mathbf{2600}$;

c) $p=1500$, $q=\mathbf{6300}$;

d) $p=2400$, $q=\mathbf{12400}$.

133. Dla podanych liczb p, q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a, b, że liczba a stanowi $p\%$ iloczynu ab, a liczba b stanowi $q\%$ iloczynu ab.

a) $p=40$, $q=60$, $a=\mathbf{5/3}$, $b=\mathbf{5/2}$;

b) $p=25$, $q=75$, $a=\mathbf{4/3}$, $b=\mathbf{4}$;

c) $p=20$, $q=80$, $a=\mathbf{5/4}$, $b=\mathbf{5}$;

d) $p=25$, $q=80$, $a=\mathbf{5/4}$, $b=\mathbf{4}$.

134. Liczbę naturalną p nazwiemy *klawą*, jeżeli istnieją takie liczby naturalne m, n, że liczba m^2 jest mniejsza od liczby n^2 o $p\%$. Dla podanej liczby k wskazać najmniejszą liczbę *klawą* $p>k$.

a) $k=11$, $p=\mathbf{19}$;

b) $k=22$, $p=\mathbf{36}$;

c) $k=44$, $p=\mathbf{51}$;

d) $k=66$, $p=\mathbf{75}$.

135. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

a) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^3\right)!\right)\right]=\mathbf{3}$;

b) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^5\right)!\right)\right]=\mathbf{5}$;

c) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^{10}\right)!\right)\right]=\mathbf{10}$;

d) $\left[\log_{10}\log_{10}\left(\left(10^{20}\right)!\right)\right]=\mathbf{21}$.

136. Podać wartość wyrażenia, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

a) $\left[\log_2\log_2 13^7\right]=\mathbf{4}$;

b) $\left[\log_2\log_2 13^{11}\right]=\mathbf{5}$;

c) $\left[\log_2\log_2 13^{15}\right]=\mathbf{5}$;

d) $\left[\log_2\log_2 13^{25}\right]=\mathbf{6}$.

137. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x\left(\sqrt{2}-1\right)>-1$, $\quad(\mathbf{0,\,1})\cup(\mathbf{\sqrt{2}+1,\,+\infty})$;

b) $\log_x\left(2-\sqrt{3}\right)>-1$, $\quad(\mathbf{0,\,1})\cup(\mathbf{2+\sqrt{3},\,+\infty})$;

c) $\log_x\left(\sqrt{5}-2\right)<-1$, $\quad(\mathbf{1,\,\sqrt{5}+2})$;

d) $\log_x\left(3-\sqrt{8}\right)<-1$, $\quad(\mathbf{1,\,3+\sqrt{8}})$.

138. Istnieje **rosnący** postęp arytmetyczny czterowyrazowy a_1,a_2,a_3,a_4 o sumie 360 i jednym z wyrazów równym x, którego pierwszy wyraz a_1 jest równy w. Dla podanej liczby x podać zbiór **wszystkich** liczb rzeczywistych w, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $x=30$, $\quad w\in\{\mathbf{-90,\,30}\}$;

b) $x=60$, $\quad w\in\{\mathbf{0,\,60}\}$;

c) $x=120$, $\quad w\in\{\mathbf{0,\,60}\}$;

d) $x=180$, $\quad w\in\{\mathbf{-180,\,0}\}$.

139. Istnieje **rosnący** postęp arytmetyczny czterowyrazowy a_1,a_2,a_3,a_4 o sumie 360 i jednym z wyrazów równym x, którego drugi wyraz a_2 jest równy w. Dla podanej liczby x podać zbiór **wszystkich** liczb rzeczywistych w, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe.

a) $x=30$, $\quad w\in\{\mathbf{30,\,70}\}$;

b) $x=60$, $\quad w\in\{\mathbf{60,\,80}\}$;

c) $x=120$, $\quad w\in\{\mathbf{60,\,80}\}$;

d) $x=180$, $\quad w\in\{\mathbf{0,\,60}\}$.

140. Suma trójwyrazowego postępu geometrycznego a_1, a_2, a_3 o ilorazie q jest równa 91. Dla podanego ilorazu q podaj środkowy wyraz a_2.

a) $q=2$, $a_2=\mathbf{26}$;

b) $q=3$, $a_2=\mathbf{21}$;

c) $q=1/2$, $a_2=\mathbf{26}$;

d) $q=1/3$, $a_2=\mathbf{21}$.

141. Liczbę naturalną q nazwiemy *fajniutką*, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p oraz liczba naturalna n, że liczba n jest większa od p o $q\%$.
Dla podanej liczby k podać najmniejszą *fajniutką* liczbę q większą od k.

a) $k=222$, $q=\mathbf{240}$;

b) $k=333$, $q=\mathbf{340}$;

c) $k=444$, $q=\mathbf{450}$;

d) $k=555$, $q=\mathbf{560}$.

142. Dla podanych a, b zapisać w postaci przedziału otwartego lub uporządkowanej sumy przedziałów otwartych zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c.

a) $a=1$, $b=3$, $c\in(\mathbf{2,4})$;

b) $a=2$, $b=3$, $c\in(\mathbf{1,5})$;

c) $a=3$, $b=7$, $c\in(\mathbf{4,10})$;

d) $a=4$, $b=7$, $c\in(\mathbf{3,11})$.

143. Dla podanych a, b zapisać w postaci przedziału otwartego lub uporządkowanej sumy przedziałów otwartych zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych dodatnich c, że istnieje trójkąt rozwartokątny o bokach długości a, b, c.

a) $a=1$, $b=3$, $c\in\left(\mathbf{2,\sqrt{8}}\right)\cup\left(\mathbf{\sqrt{10},4}\right)$;

b) $a=2$, $b=3$, $c\in\left(\mathbf{1,\sqrt{5}}\right)\cup\left(\mathbf{\sqrt{13},5}\right)$;

c) $a=3$, $b=7$, $c\in\left(\mathbf{4,\sqrt{40}}\right)\cup\left(\mathbf{\sqrt{58},10}\right)$;

d) $a=4$, $b=7$, $c\in\left(\mathbf{3,\sqrt{33}}\right)\cup\left(\mathbf{\sqrt{65},11}\right)$.

144. Dany jest 20-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{20}$. Podać miarę kąta

a) $\measuredangle A_6A_{17}A_7=\mathbf{9}^\circ$;

b) $\measuredangle A_6A_7A_{17}=\mathbf{81}^\circ$;

c) $\measuredangle A_6A_2A_{17}=\mathbf{99}^\circ$;

d) $\measuredangle A_6A_{20}A_{17}=\mathbf{99}^\circ$.

145. Dany jest n-kąt foremny $A_1A_2\dots A_n$. Podać miarę kąta $\sphericalangle A_1A_2A_4$, jeżeli

a) $n=6$, $\mathbf{90^\circ}$;

b) $n=9$, $\mathbf{120^\circ}$;

c) $n=18$, $\mathbf{150^\circ}$;

d) $n=27$, $\mathbf{160^\circ}$.

146. Dany jest piętnastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych liczb m, n podać **wszystkie** takie liczby k, że trójkąt $A_mA_nA_k$ ma co najmniej jeden kąt o mierze 60°

a) $m=1$, $n=4$, $k\in\{\mathbf{9,\ 11}\}$;

b) $m=1$, $n=5$, $k\in\{\mathbf{10,\ 11}\}$;

c) $m=1$, $n=8$, $k\in\{\mathbf{3,\ 6,\ 11,\ 13}\}$;

d) $m=1$, $n=10$, $k\in\{\mathbf{5,\ 6,\ 11,\ 15}\}$.

147. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

a) $\sphericalangle ABC=50^\circ$, $\sphericalangle AOC=\mathbf{100^\circ}$;

b) $\sphericalangle ABC=80^\circ$, $\sphericalangle AOC=\mathbf{160^\circ}$;

c) $\sphericalangle ABC=100^\circ$, $\sphericalangle AOC=\mathbf{160^\circ}$;

d) $\sphericalangle ABC=150^\circ$, $\sphericalangle AOC=\mathbf{60^\circ}$.

148. Uzupełnij dane dotyczące n-kąta foremnego, gdzie LP jest liczbą przekątnych, a MKW miarą kąta wewnętrznego.

a) $n=6$, LP = **9**, MKW = $\mathbf{120^\circ}$;

b) $n=\mathbf{9}$, LP = **27**, MKW = 140° ;

c) $n=\mathbf{12}$, LP = **54**, MKW = 150° ;

d) $n=\mathbf{20}$, LP = 170, MKW = $\mathbf{162^\circ}$.

149. Dla podanej liczby naturalnej a podać takie liczby całkowite dodatnie b, c, że trójkąt o bokach długości a, b, c jest prostokątny, a przy tym c jest długością jego przeciwprostokątnej.

a) $a=3$, $b=\mathbf{4}$, $c=\mathbf{5}$;

b) $a=5$, $b=\mathbf{12}$, $c=\mathbf{13}$;

c) $a=7$, $b=\mathbf{24}$, $c=\mathbf{25}$;

d) $a=9$, $b=\mathbf{12}$, $c=\mathbf{15}$ lub $\boldsymbol{b}=\mathbf{40}$, $\boldsymbol{c}=\mathbf{41}$.

150. Dany jest 15-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{15}$. Dla podanych x, y, z, s wskazać takie t, że pięciokąt wypukły o wierzchołkach A_x, A_y, A_z, A_s, A_t (niekoniecznie leżących na obwodzie pięciokąta w tej kolejności) ma pole równe polu pięciokąta $A_1A_3A_6A_{10}A_{15}$.

a) $x=1$, $y=4$, $z=5$, $s=7$, $t=\mathbf{11}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{12}$;

b) $x=1$, $y=4$, $z=8$, $s=11$, $t=\mathbf{2}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{3}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{9}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{10}$;

c) $x=1$, $y=6$, $z=11$, $s=12$, $t=\mathbf{3}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{4}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{8}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{9}$;

d) $x=1$, $y=6$, $z=11$, $s=13$, $t=\mathbf{2}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{5}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{7}$ lub $\boldsymbol{t}=\mathbf{10}$.

151. Dany jest n-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Podać liczbę jego przekątnych krótszych od 1.

a) $n=12$, liczba przekątnych krótszych od 1: **0** ;

b) $n=17$, liczba przekątnych krótszych od 1: **17** ;

c) $n=25$, liczba przekątnych krótszych od 1: **75** ;

d) $n=42$, liczba przekątnych krótszych od 1: **210** .

152. Dla podanych a, b, c podać takie d, aby istniał czworokąt wypukły o bokach długości (z zachowaniem kolejności) a, b, c, d, w którym przekątne są prostopadłe. Napisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba d o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=1$, $b=5$, $c=7$, $d=$ **5** ;

b) $a=1$, $b=4$, $c=8$, $d=$ **7** ;

c) $a=4$, $b=9$, $c=8$, $d=$ **NIE** ;

d) $a=5$, $b=11$, $c=10$, $d=$ **2** .

153. Istnieje czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d (z zachowaniem kolejności), w który można wpisać okrąg. Dla podanych a, b, c podać takie d, aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie d nie istnieje.

a) $a=3$, $b=4$, $c=7$, $d=$ **6** ;

b) $a=5$, $b=6$, $c=7$, $d=$ **6** ;

c) $a=7$, $b=13$, $c=7$, $d=$ **1** ;

d) $a=4$, $b=10$, $c=5$, $d=$ **NIE** .

154. Istnieje czworokąt wypukły o kątach miary α, β, γ, δ (z zachowaniem kolejności), na którym można opisać okrąg. Dla podanych α, β podać takie γ, δ, aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że takie γ, δ nie istnieją.

a) $\alpha=10^\circ$, $\beta=177^\circ$, $\gamma=\mathbf{170}^\circ$, $\delta=\mathbf{3}^\circ$;

b) $\alpha=20^\circ$, $\beta=50^\circ$, $\gamma=\mathbf{160}^\circ$, $\delta=\mathbf{130}^\circ$;

c) $\alpha=40^\circ$, $\beta=140^\circ$, $\gamma=\mathbf{140}^\circ$, $\delta=\mathbf{40}^\circ$;

d) $\alpha=80^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\gamma=\mathbf{100}^\circ$, $\delta=\mathbf{90}^\circ$.

155. W okrąg o promieniu 1 wpisano n-kąt foremny. Ile przekątnych tego n-kąta ma długość będącą liczbą całkowitą?

a) Dla $n=6$ takich przekątnych jest **3** ;

b) Dla $n=12$ takich przekątnych jest **18** ;

c) Dla $n=20$ takich przekątnych jest **10** ;

d) Dla $n=30$ takich przekątnych jest **45** .

156. Czy nierówność $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos3\alpha\cdot\cos7\alpha\cdot\cos15\alpha\cdot\cos71\alpha>0$ jest prawdziwa dla

a) $\alpha=1^\circ$; **TAK**

b) $\alpha=2^\circ$; **NIE**

c) $\alpha=3^\circ$; **NIE**

d) $\alpha=4^\circ$? **TAK**

157. Rozważamy 100-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{100}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k\leqslant 100$, różnych od m, n, że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

a) $m=1$, $n=2$, $k\in\{\mathbf{51,\ 52}\}$;

b) $m=17$, $n=29$, $k\in\{\mathbf{67,\ 79}\}$;

c) $m=44$, $n=66$, $k\in\{\mathbf{16,\ 94}\}$;

d) $m=50$, $n=75$, $k\in\{\mathbf{25,\ 100}\}$?

158. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości

a) 5, 5, 9; **TAK**

b) 5, 5, 11; **TAK**

c) 5, 9, 9; **TAK**

d) 5, 11, 11? **NIE**

159. Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości

a) 10, 20, 29; **NIE**

b) 10, 20, 31; **NIE**

c) 10, 11, 20; **TAK**

d) 10, 11, 100? **TAK**

160. W okrąg o promieniu R wpisano taki czworokąt $ABCD$, że $AB=BC=a$ oraz $CD=DA=b$. Podać wzór na R w zależności od a i b. Wzór nie może zawierać funkcji trygonometrycznych.

$$R=\frac{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}}{\mathbf{2}}$$

161. W okrąg o promieniu R wpisano taki sześciokąt $ABCDEF$, że $AB=BC=CD=a$ oraz $DE=EF=FA=b$. Podać wzór **(bez funkcji trygonometrycznych)** na R w zależności od a i b.

$$R=\sqrt{\frac{\mathbf{a^2+ab+b^2}}{\mathbf{3}}}$$

162. W okrąg o promieniu R wpisano taki ośmiokąt $ABCDEFGH$, że $AB=BC=CD=DE=a$ oraz $EF=FG=GH=HA=b$. Uzupełnić wzór na R w zależności od a i b, wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R=\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot a^2+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\cdot ab+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot b^2}$$

163. W okrąg o promieniu R wpisany jest taki dwunastokąt $ABCDEFGHIJKL$, że $AB=BC=CD=DE=EF=FG=a$ oraz $GH=HI=IJ=JK=KL=LA=b$. Uzupełnić wzór na R w zależności od a i b, wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R=\sqrt{\mathbf{1}\cdot a^2+\sqrt{\mathbf{3}}\cdot ab+\mathbf{1}\cdot b^2}$$