

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 125^k .

a) $n = 123456789098765432100250^{60}$, $k = \mathbf{60}$

b) $n = 123456789098765432100555^{50}$, $k = \mathbf{16}$

c) $n = 123456789098765432100075^{20}$, $k = \mathbf{13}$

d) $n = 123456789098765432100054^{55}$, $k = \mathbf{0}$

2. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 128^k .

a) $n = 123456789098765432100024^{10}$, $k = \mathbf{4}$

b) $n = 123456789098765432100028^{20}$, $k = \mathbf{5}$

c) $n = 123456789098765432100026^{50}$, $k = \mathbf{7}$

d) $n = 123456789098765432100027^{60}$, $k = \mathbf{0}$

3. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest jedenastocyfrowa.

a) $n = 100000000095$, $d = \mathbf{15}$

b) $n = 100000000161$, $d = \mathbf{9}$

c) $n = 100000000412$, $d = \mathbf{4}$

d) $n = 100000000475$, $d = \mathbf{25}$

4. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest kwadratem liczby całkowitej.

a) $n = 72^{333}$, $k = 2$

b) $n = 12^{333}$, $k = 3$

c) $n = 18^{333}$, $k = 2$

d) $n = 24^{333}$, $k = 6$

5. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianiem liczby całkowitej.

a) $n = 12^{4444}$, $k = 18$

b) $n = 24^{4444}$, $k = 9$

c) $n = 18^{4444}$, $k = 12$

d) $n = 72^{4444}$, $k = 3$

6. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

a) $46^{26} - 3^{26}$, **43**

b) $52^{26} - 3^{26}$, **11**

c) $58^{26} - 3^{52}$, **67**

d) $34^{26} - 3^{52}$, **43**

7. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

- a) $2^{111} - 1$, **7**
- b) $2^{145} - 1$, **31**
- c) $3^{145} + 1$, **61**
- d) $3^{111} - 1$, **13**

8. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, \dots, a_n$ o sumie 600 i jednym z wyrazów równym 0, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w . Dla podanej liczby n podać wszystkie liczby $w \neq 0$, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 25$, $w = \mathbf{24}$ lub $w = \mathbf{48}$
- b) $n = 15$, $w = \mathbf{40}$ lub $w = \mathbf{80}$
- c) $n = 10$, $w = \mathbf{120}$
- d) $n = 6$, $w = \mathbf{200}$

9. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, \dots, a_n$ o sumie 75 i jednym z wyrazów równym 5, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w . Dla podanej liczby n podać wszystkie liczby $w \neq 5$, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 75$, $w = \mathbf{-3}$ lub $w = \mathbf{1}$
- b) $n = 15$, $w = \mathbf{NIE}$
- c) $n = 5$, $w = \mathbf{15}$ lub $w = \mathbf{25}$
- d) $n = 25$, $w = \mathbf{1}$ lub $w = \mathbf{3}$

10. W dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 2015-wyrazowym, w którym **kwadraty** wyrazów pierwszego, trzeciego i czwartego tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny, wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny. Dla podanej jednej z liczb, podać dwie pozostałe tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 14$, $n = 18$, $k = 20$
- b) $m = 4$, $n = 8$, $k = 10$
- c) $m = 3$, $n = 7$, $k = 9$
- d) $m = 8$, $n = 12$, $k = 14$

11. W dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 2015-wyrazowym, w którym **sześciany** wyrazów pierwszego, trzeciego i czwartego tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny, wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny. Dla podanej jednej z liczb, podać dwie pozostałe tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 11$, $n = 17$, $k = 20$
- b) $m = 3$, $n = 9$, $k = 12$
- c) $m = 6$, $n = 12$, $k = 15$
- d) $m = 4$, $n = 10$, $k = 13$

12. Liczbę naturalną n nazwiemy *milutką*, jeżeli spełnione są następujące warunki:

- liczba n nie jest podzielna przez 6,
- liczba n nie jest szóstą potęgą liczby całkowitej.
- liczba n^n jest szóstą potęgą liczby całkowitej.

Dla podanej liczby k podać najmniejszą *milutką* liczbę n większą od k .

- a) $k = 100$, $n = 225$
- b) $k = 125$, $n = 225$
- c) $k = 1$, $n = 8$
- d) $k = 16$, $n = 81$