

Ćwiczenia 5/6, 10, 17.03.2015 (obie grupy)

33. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n .

- a) liczba n jest nieparzysta
- b) liczba n jest względnie pierwsza z 6
- c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4
- d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6
- e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
- f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
- g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
- h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
- i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
- j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

34. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2013.

35. Niech $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n . Ile zer końcowych mają liczby $34!!$ oraz $35!!$?

36. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k , dla której podane wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m , n i (ewentualnie) r .

- a) $3^k | mn \Rightarrow (3^3 | m \vee 3^3 | n)$
- b) $5^k | mn \Rightarrow (5^2 | m \vee 5^7 | n)$
- c) $7^k | mnr \Rightarrow (7^5 | m \vee 7^3 | n \vee 7^{12} | r)$
- d) $4^k | mnr \Rightarrow (4^5 | m \vee 4^3 | n \vee 4^{12} | r)$
- e) $6^k | mnr \Rightarrow (6^5 | m \vee 6^3 | n \vee 6^{12} | r)$

37. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej
 $a = 90 \cdot 60^9$, $b = 15^3 \cdot 120^7$, $c = 2^7 \cdot 30^{11}$, $d = 60^{10}$
 $e = 40^6 \cdot 45^5$, $f = 72^6 \cdot 5^{10}$, $g = 5^{11} \cdot 50000^2$

38. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.

Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.

Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.

Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

39. W miejsce kropek wstawić największą/najmniejszą (cokolwiek jest sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$

b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$

d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$

e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$

f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^3$

g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots$

h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots|n$

40. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

41. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *ładną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma sumę cyfr równą k . Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 5 jest *ładnych*. Które z podanych liczb są *ładne*?

42. Na potrzeby tego zadania, liczbę naturalną k nazwiemy *fajną*, jeżeli istnieje liczba naturalna, której sześcian ma sumę cyfr równą k . Wiadomo, że wśród 11 kolejnych liczb naturalnych od 3010 do 3020 dokładnie 3 są *fajne*. Które z podanych liczb są *fajne*?

43. Dana jest liczba naturalna n . Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n , a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Czemu jest równa podana liczba, o ile istnieje?

a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D .

b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D .

c) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W .

d) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W .

44. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

45. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

46. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n, k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jeden z czynników m, n, k jest podzielny przez d .

Dla których liczb naturalnych d powyższe zdanie jest prawdziwe?

47. Dowieść, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o jeden jest kwadratem liczby całkowitej.

48. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej. Nie używać kalkulatora!!!

$$a = 3, \quad b = \sqrt{7 + \sqrt{10}}, \quad c = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}, \quad d = \sqrt{10}, \quad e = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad f = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}.$$

49. Uprościć wyrażenia

a)
$$\frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}$$

b)
$$\sqrt{(1 - \sqrt{2})^6}$$

c)
$$(2^{2007} - 1) \cdot (2^{2007} + 1)$$

d)
$$(3^{669} - 1) \cdot (9^{669} + 3^{669} + 1)$$

e)
$$\frac{2^{2007} + 1}{2^{669} + 1}$$

50. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x + 2)^2 = x^2 + \dots$

b) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot \dots$

c) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \dots$

d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$

e) $a^4 \dots b^4 = (a + b) \cdot \dots$

f) $a^4 \dots b^4 = (a - b) \cdot \dots$

g) $a^5 \dots b^5 = (a + b) \cdot \dots$

h) $a^5 \dots b^5 = (a - b) \cdot \dots$

i) $(a + b)^3 = a^3 + 3 \dots$

j) $(a - b)^4 = a^4 - \dots$

k) $(a - b)^5 = a^5 - \dots$

l) $a^n - b^n = (a - b) \cdot \dots$

m) $a^n + b^n = (a + b) \cdot \dots$ - dla których n ?

n) $a^n - b^n = (a + b) \cdot \dots$ - dla których n ?

o) $a^n + b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

p) $a^n - b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

51. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

52. Obliczyć

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2187},$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

53. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie? W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

Ćwiczenia 12, 19.03.2015 (grupa 1)

Dla studentów grupy 2 są to zadania do samodzielnego rozwiązania, jednak sugeruję studentom grupy 2 przyjście na zajęcia grupy 1.

54. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 4^k .

- a) $n = 1112854710^{25}$, $k = \dots$;
- b) $n = 1112854711^{16}$, $k = \dots$;
- c) $n = 285470004^{19}$, $k = \dots$;
- d) $n = 285470024^{21}$, $k = \dots$.

55. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 8^k .

- a) $n = 123456789200037^{37}$, $k = \dots$;
- b) $n = 123456789200038^{40}$, $k = \dots$;
- c) $n = 123456789200048^{45}$, $k = \dots$;
- d) $n = 123456789200060^{50}$, $k = \dots$.

56. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(20!, 21^3) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(21!, 22^3) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(22!, 23^3) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(23!, 24^3) = \dots$.

57. Dla podanej liczby s podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o sumie cyfr równej s jest podzielna przez d .

- a) $s = 15$, $d = \dots$;
- b) $s = 16$, $d = \dots$;
- c) $s = 17$, $d = \dots$;
- d) $s = 18$, $d = \dots$.

58. Dla podanej liczby k podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o dwucyfrowej końcówce równej k jest podzielna przez d .

- a) $k = 15$, $d = \dots$;
- b) $k = 16$, $d = \dots$;
- c) $k = 17$, $d = \dots$;
- d) $k = 18$, $d = \dots$.

59. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(1234000050, 900) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(1234000051, 900) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(1234000052, 900) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(1234000053, 900) = \dots$.

60. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(25!, 26^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(26!, 27^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(27!, 28^2) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(28!, 29^2) = \dots$.

61. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(7!, 8^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(8!, 9^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(15!, 16^3) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(24!, 25^3) = \dots$.

62. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 12^{2014}$, $k = \dots$;
- b) $n = 12^{2015}$, $k = \dots$;
- c) $n = 12^{2016}$, $k = \dots$;
- d) $n = 12^{2017}$, $k = \dots$.

63. Dla podanej liczby d wskazać najmniejszą taką liczbę naturalną k , że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi wyrażenie:

$$d^k | mn \Rightarrow (d^3 | m \vee d^4 | n).$$

Napisać **NIE**, gdy taka liczba k nie istnieje.

- a) $d = 8$, $k = \dots$;
- b) $d = 9$, $k = \dots$;
- c) $d = 10$, $k = \dots$;
- d) $d = 11$, $k = \dots$.

64. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest dziesięciocyfrowa, w jej zapisie dziesiętnym występuje 7 zer.

- a) $n = 1000000017$, $d = \dots$;
- b) $n = 1000000038$, $d = \dots$;
- c) $n = 1000000065$, $d = \dots$;
- d) $n = 1000000028$, $d = \dots$.

65. Rozważamy ciąg 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 51, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr. Wiadomo, że dla każdej pary poniższych liczb a , b w ciągu tym występuje dokładnie jedna liczba naturalna n spełniająca nierówności $a \leq n \leq b$. Wskazać tę liczbę.

- a) $a = 1305$, $b = 1310$, $n = \dots$;
- b) $a = 2005$, $b = 2010$, $n = \dots$;
- c) $a = 3005$, $b = 3010$, $n = \dots$;
- d) $a = 4005$, $b = 4010$, $n = \dots$.

66. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę naturalną k , dla której liczba n jest podzielna przez 12^k .

- a) $n = 8^8 \cdot 9^9$, $k = \dots$;
- b) $n = 16^{16} \cdot 9^9$, $k = \dots$;
- c) $n = 8^8 \cdot 18^{18}$, $k = \dots$;
- d) $n = 16^{16} \cdot 18^{18}$, $k = \dots$.

67. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a , b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a , b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 29$, $k = \dots$;
- b) $n = 3^7 \cdot 101$, $k = \dots$;
- c) $n = 3^5 \cdot 29$, $k = \dots$;
- d) $n = 5^5 \cdot 101$, $k = \dots$.

68. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m , n , k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez D , to co najmniej jeden z czynników m , n , k jest podzielny przez d . Dla podanej liczby D wskazać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $D = 2^3 \cdot 3^2$, $d = \dots$;
- b) $D = 2^4 \cdot 3^3$, $d = \dots$;
- c) $D = 2^9 \cdot 3^4$, $d = \dots$;
- d) $D = 2^{11} \cdot 3^7$, $d = \dots$.

69. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb

- a) $\text{NWD}(140!, 210!) = \dots$;
- b) $\text{NWW}(140!, 210!) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(125!, 145!, 150!) = \dots$;
- d) $\text{NWW}(125!, 145!, 150!) = \dots$.

70. Jeżeli liczba całkowita dodatnia m jest większa od liczby całkowitej dodatniej n o $p\%$, to liczba n jest mniejsza od m o $q\%$. Dla podanej liczby p podać taką liczbę q , aby powyższe zdanie było prawdziwe

- a) $p = 150$, $q = \dots$;
- b) $p = 300$, $q = \dots$;
- c) $p = 400$, $q = \dots$;
- d) $p = 900$, $q = \dots$.

71. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $26^7 + 3^7$, $\dots$;
- b) $26^7 - 3^7$, $\dots$;
- c) $48^7 - 5^{14}$, $\dots$;
- d) $48^7 + 5^{14}$, $\dots$.

72. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $36^{14} - 11^{14}$, $\dots$;
- b) $7^6 + 2^{12}$, $\dots$;
- c) $26^6 - 21^6$, $\dots$;
- d) $6^6 + 5^6$, $\dots$.

73. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $2^{25} - 1$, $\dots$;
- b) $2^{25} + 1$, $\dots$;
- c) $3^{25} - 1$, $\dots$;
- d) $3^{25} + 1$, $\dots$.

74. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to największy wspólny dzielnik liczb m, n stanowi $q\%$ liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p = 10$, $q = \dots$;
- b) $p = 20$, $q = \dots$;
- c) $p = 30$, $q = \dots$;
- d) $p = 40$, $q = \dots$.

75. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $\frac{n \cdot (a_7 + a_k)}{2}$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3, \quad n = \dots$;
- b) $k = 5, \quad n = \dots$;
- c) $k = 7, \quad n = \dots$;
- d) $k = 10, \quad n = \dots$.

76. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $n \cdot a_k$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3, \quad n = \dots$;
- b) $k = 5, \quad n = \dots$;
- c) $k = 7, \quad n = \dots$;
- d) $k = 10, \quad n = \dots$.

77. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy drugi, czwarty i siódmy tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 2, \quad n = 14, \quad k = \dots$;
- b) $m = 2, \quad n = 6, \quad k = \dots$;
- c) $m = 2, \quad n = \dots, \quad k = 14$;
- d) $m = 3, \quad n = 98, \quad k = \dots$.

78. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 120 i jednym z wyrazów równym 15, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać wszystkie liczby $w \neq 15$, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 6, \quad w = \dots$;
- b) $n = 8, \quad w = \dots$;
- c) $n = 12, \quad w = \dots$;
- d) $n = 15, \quad w = \dots$.

79. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego 15-wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ jest równa $5(a_m + a_n + a_k)$. Dla podanych m, n wskazać taką liczbę naturalną k , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 1, \quad n = 10, \quad k = \dots$;
- b) $m = 3, \quad n = 9, \quad k = \dots$;
- c) $m = 6, \quad n = 8, \quad k = \dots$;
- d) $m = 7, \quad n = 10, \quad k = \dots$.

Ćwiczenia 13, 20.03.2015 (grupa 2)

Dla studentów grupy 1 są to zadania do samodzielnego rozwiązania, jednak sugeruję studentom grupy 1 przyjście na zajęcia grupy 2.

80. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest kwadratem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \dots$.

81. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianiem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \dots$.

82. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

- a) $n = 24^{2013}$, $k = \dots$;
- b) $n = 24^{2014}$, $k = \dots$;
- c) $n = 24^{2015}$, $k = \dots$;
- d) $n = 24^{2016}$, $k = \dots$.

83. Wypisać w kolejności rosnącej wszystkie takie liczby naturalne n , że

- a) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej $\dots$;
- b) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest sześcianiem liczby całkowitej $\dots$;
- c) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest czwartą potęgą liczby całkowitej $\dots$;
- d) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest piątą potęgą liczby całkowitej $\dots$.

84. Dla podanej liczby n podać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której liczba $n!$ jest podzielna przez d^6 .

- a) $n = 10$, $d = \dots$;
- b) $n = 15$, $d = \dots$;
- c) $n = 20$, $d = \dots$;
- d) $n = 25$, $d = \dots$.

85. Podać największy wspólny dzielnik, gdzie $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ jest iloczynem liczb całkowitych dodatnich nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n .

- a) $\text{NWD}(24!!, 25^2) = \dots$;
- b) $\text{NWD}(26!!, 27^2) = \dots$;
- c) $\text{NWD}(27!!, 28^2) = \dots$;
- d) $\text{NWD}(29!!, 30^2) = \dots$.

86. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k taką, że liczba n jest podzielna przez 125^k .

- a) $n = 20142014120142015^{11}$, $k = \dots$;
- b) $n = 20142014120142025^{22}$, $k = \dots$;
- c) $n = 20142014120142075^{33}$, $k = \dots$;
- d) $n = 20142014120142080^{44}$, $k = \dots$.

87. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 33$, $k = \dots$;
- b) $n = 2^9 \cdot 36$, $k = \dots$;
- c) $n = 2^9 \cdot 62$, $k = \dots$;
- d) $n = 2^9 \cdot 82$, $k = \dots$.

88. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

- a) $2^{21} - 1$, $\dots$;
- b) $3^{21} - 1$, $\dots$;
- c) $3^{51} - 2^{51}$, $\dots$;
- d) $3^{51} + 1$, $\dots$.

89. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geq k$, że $\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$

- a) $k = 2$, $n = \dots$;
- b) $k = 3$, $n = \dots$;
- c) $k = 4$, $n = \dots$;
- d) $k = 5$, $n = \dots$.

90. Wiedząc, że $\binom{14}{4} = 1001$, $\binom{14}{5} = 2002$, $\binom{14}{6} = 3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

- a) $\binom{15}{5} = \dots$;
- b) $\binom{15}{6} = \dots$;
- c) $\binom{16}{6} = \dots$;
- d) $\binom{15}{10} = \dots$.

91. Dla podanych n, k , wskazać takie $m > k$, aby prawdziwa była równość

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{m}$$

- a) $n = 1000$, $k = 200$, $m = \dots$;
- b) $n = 1500$, $k = 300$, $m = \dots$;
- c) $n = 2000$, $k = 400$, $m = \dots$;
- d) $n = 2013$, $k = 500$, $m = \dots$.

92. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$(a^{a^k})^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

- a) $a = 5, \quad k = 2, \quad n = \dots$;
- b) $a = 3, \quad k = 3, \quad n = \dots$;
- c) $a = 2, \quad k = 5, \quad n = \dots$;
- d) $a = 3, \quad k = 4, \quad n = \dots$.

93. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n jest większa o $q\%$ od liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p = 10, \quad q = \dots$;
- b) $p = 20, \quad q = \dots$;
- c) $p = 30, \quad q = \dots$;
- d) $p = 40, \quad q = \dots$.

94. Podać liczbę całkowitą dodatnią n , dla której prawdziwe jest następujące twierdzenie: W dowolnym postępie arytmetycznym n wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ suma wyrazów jest równa

- a) $n \cdot a_5$ – dla $n = \dots$;
- b) $n \cdot \frac{a_4 + a_7}{2}$ – dla $n = \dots$;
- c) $n \cdot (2a_{12} - a_{11})$ – dla $n = \dots$;
- d) $n \cdot \frac{a_{10} + a_{12}}{2}$ – dla $n = \dots$.

95. Dla podanej liczby n podaj największą liczbę naturalną d o następującej własności: Dowolny postęp arytmetyczny n -wyrazowy o wyrazach całkowitych ma sumę wyrazów podzieloną przez d .

- a) $n = 2013, \quad d = \dots$;
- b) $n = 2014, \quad d = \dots$;
- c) $n = 2015, \quad d = \dots$;
- d) $n = 2016, \quad d = \dots$.

96. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $\frac{n \cdot (a_k + a_{2k})}{2}$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3, \quad n = \dots$;
- b) $k = 5, \quad n = \dots$;
- c) $k = 7, \quad n = \dots$;
- d) $k = 10, \quad n = \dots$.

97. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy drugi, czwarty i siódmy tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 3$, $n = \dots$, $k = \dots$;
- b) $m = \dots$, $n = 5$, $k = \dots$;
- c) $m = \dots$, $n = \dots$, $k = 8$;
- d) $m = \dots$, $n = 8$, $k = \dots$.

98. W dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 10-wyrazowym, w którym wyrazy pierwszy, trzeci i czwarty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny. Dla podanej jednej z liczb, podać dwie pozostałe tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 3$, $n = \dots$, $k = \dots$;
- b) $m = \dots$, $n = 5$, $k = \dots$;
- c) $m = 7$, $n = \dots$, $k = \dots$;
- d) $m = \dots$, $n = \dots$, $k = 10$.

99. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 90, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać liczbę w , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 5$, $w = \dots$;
- b) $n = 9$, $w = \dots$;
- c) $n = 10$, $w = \dots$;
- d) $n = 15$, $w = \dots$.

100. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2 , w którym występuje wyraz równy 1.

- a) $n = 3$, $\dots$;
- b) $n = 4$, $\dots$;
- c) $n = 5$, $\dots$;
- d) $n = 7$, $\dots$.

24.03.2015 – Kolokwium nr 1

Na kolokwiach 1, 4 i 007 obowiązuje materiał zadań 1-100. Pomocne mogą być też quizy w sekcjach 1–3 na Moodlu. Konsultacje 24.03.2015 w godz. 7:00–10:00, pok. 313.

26/27.03.2015 (obie grupy) – omówienie kolokwium nr 1

31.03.2015 – Kolokwia nr 4 i 007

9.04.2015 (4 godziny 8–12, grupa 1) – omówienie kolokwiów nr 4 i 007

Zajęcia z 2.04.2015 przeniesione na 9.04.2015 godz. 10-12, s. 601. Zapraszam studentów grupy 2 na zajęcia 9.04.2015, gdyż w grupie 2 nie będzie zaplanowane omawianie tych kolokwiów.