

54. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 4^k .

- a) $n = 1112854710^{25}$, $k = 12$;
- b) $n = 1112854711^{16}$, $k = 0$;
- c) $n = 285470004^{19}$, $k = 19$;
- d) $n = 285470024^{21}$, $k = 31$.

55. Dla podanej liczby n wskazać największą liczbę całkowitą nieujemną k , dla której liczba n jest podzielna przez 8^k .

- a) $n = 123456789200037^{37}$, $k = 0$;
- b) $n = 123456789200038^{40}$, $k = 13$;
- c) $n = 123456789200048^{45}$, $k = 60$;
- d) $n = 123456789200060^{50}$, $k = 33$.

56. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(20!, 21^3) = 3^3 \cdot 7^2 = 1323$;
- b) $\text{NWD}(21!, 22^3) = 2^3 \cdot 11 = 88$;
- c) $\text{NWD}(22!, 23^3) = 1$;
- d) $\text{NWD}(23!, 24^3) = 24^3$.

57. Dla podanej liczby s podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o sumie cyfr równej s jest podzielna przez d .

- a) $s = 15$, $d = 3$;
- b) $s = 16$, $d = 1$;
- c) $s = 17$, $d = 1$;
- d) $s = 18$, $d = 9$.

58. Dla podanej liczby k podać największą liczbę całkowitą dodatnią d o następującej własności: Każda liczba całkowita dodatnia o dwucyfrowej końcówce równej k jest podzielna przez d .

- a) $k = 15$, $d = 5$;
- b) $k = 16$, $d = 4$;
- c) $k = 17$, $d = 1$;
- d) $k = 18$, $d = 2$.

59. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(1234000050, 900) = 150$;
- b) $\text{NWD}(1234000051, 900) = 1$;
- c) $\text{NWD}(1234000052, 900) = 4$;
- d) $\text{NWD}(1234000053, 900) = 9$.

60. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(25!, 26^2) = 52$;
- b) $\text{NWD}(26!, 27^2) = 27^2 = 729$;
- c) $\text{NWD}(27!, 28^2) = 28^2 = 784$;
- d) $\text{NWD}(28!, 29^2) = 1$.

61. Podać największy wspólny dzielnik.

- a) $\text{NWD}(7!, 8^2) = 16$;
- b) $\text{NWD}(8!, 9^2) = 9$;
- c) $\text{NWD}(15!, 16^3) = 2^{11} = 2048$;
- d) $\text{NWD}(24!, 25^3) = 5^4 = 625$.

62. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 12^{2014}$, $k = 18$;
- b) $n = 12^{2015}$, $k = 12$;
- c) $n = 12^{2016}$, $k = 1$;
- d) $n = 12^{2017}$, $k = 18$.

63. Dla podanej liczby d wskazać najmniejszą taką liczbę naturalną k , że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi wynikanie:

$$d^k | mn \Rightarrow (d^3 | m \vee d^4 | n).$$

Napisać **NIE**, gdy taka liczba k nie istnieje.

- a) $d = 8$, $k = 7$;
- b) $d = 9$, $k = 7$;
- c) $d = 10$, $k = \text{NIE}$;
- d) $d = 11$, $k = 6$.

64. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać liczbę naturalną $d < 100$, która jest dzielnikiem liczby n , a ponadto jest liczbą złożoną. Liczba n jest dziesięciocyfrowa, w jej zapisie dziesiętnym występuje 7 zer.

- a) $n = 1000000017$, $d = 9$;
- b) $n = 1000000038$, $d = 6$;
- c) $n = 1000000065$, $d = 15$;
- d) $n = 1000000028$, $d = 4$.

65. Rozważamy ciąg 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 51, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr. Wiadomo, że dla każdej pary poniższych liczb a , b w ciągu tym występuje dokładnie jedna liczba naturalna n spełniająca nierówności $a \leq n \leq b$. Wskazać tę liczbę.

- a) $a = 1305$, $b = 1310$, $n = 1308$;
- b) $a = 2005$, $b = 2010$, $n = 2010$;
- c) $a = 3005$, $b = 3010$, $n = 3009$;
- d) $a = 4005$, $b = 4010$, $n = 4008$.

66. Dla podanej liczby naturalnej n wskazać największą liczbę naturalną k , dla której liczba n jest podzielna przez 12^k .

- a) $n = 8^8 \cdot 9^9$, $k = 12$;
- b) $n = 16^{16} \cdot 9^9$, $k = 18$;
- c) $n = 8^8 \cdot 18^{18}$, $k = 21$;
- d) $n = 16^{16} \cdot 18^{18}$, $k = 36$.

67. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a , b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a , b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 29$, $k = 2^5 = 32$;
- b) $n = 3^7 \cdot 101$, $k = 101$;
- c) $n = 3^5 \cdot 29$, $k = 29$;
- d) $n = 5^5 \cdot 101$, $k = 5^3 = 125$.

68. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m , n , k , jeżeli iloczyn mnk jest podzielny przez D , to co najmniej jeden z czynników m , n , k jest podzielny przez d . Dla podanej liczby D wskazać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe.

- a) $D = 2^3 \cdot 3^2$, $d = 3$;
- b) $D = 2^4 \cdot 3^3$, $d = 2^2 = 4$;
- c) $D = 2^9 \cdot 3^4$, $d = 3^2 = 9$;
- d) $D = 2^{11} \cdot 3^7$, $d = 3^3 = 27$.

69. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb

- a) $\text{NWD}(140!, 210!) = 140!$;
- b) $\text{NWW}(140!, 210!) = 210!$;
- c) $\text{NWD}(125!, 145!, 150!) = 125!$;
- d) $\text{NWW}(125!, 145!, 150!) = 150!$.

70. Jeżeli liczba całkowita dodatnia m jest większa od liczby całkowitej dodatniej n o $p\%$, to liczba n jest mniejsza od m o $q\%$. Dla podanej liczby p podać taką liczbę q , aby powyższe zdanie było prawdziwe

- a) $p = 150$, $q = 60$;
- b) $p = 300$, $q = 75$;
- c) $p = 400$, $q = 80$;
- d) $p = 900$, $q = 90$.

71. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $26^7 + 3^7$, **29**;
- b) $26^7 - 3^7$, **23**;
- c) $48^7 - 5^{14}$, **23**;
- d) $48^7 + 5^{14}$, **73**.

72. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $36^{14} - 11^{14}$, **47**;
- b) $7^6 + 2^{12}$, **13**;
- c) $26^6 - 21^6$, **47**;
- d) $6^6 + 5^6$, **61**.

73. Dla podanej liczby wskazać jej **dwucyfrowy** dzielnik pierwszy.

- a) $2^{25} - 1$, **31**;
- b) $2^{25} + 1$, **11**;
- c) $3^{25} - 1$, **11**;
- d) $3^{25} + 1$, **61**.

74. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to największy wspólny dzielnik liczb m, n stanowi $q\%$ liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p = 10$, $q = 10$;
- b) $p = 20$, $q = 20$;
- c) $p = 30$, $q = 10$;
- d) $p = 40$, $q = 20$.

75. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $\frac{n \cdot (a_7 + a_k)}{2}$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3, \quad n = \mathbf{9}$;
- b) $k = 5, \quad n = \mathbf{11}$;
- c) $k = 7, \quad n = \mathbf{13}$;
- d) $k = 10, \quad n = \mathbf{16}$.

76. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $n \cdot a_k$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3, \quad n = \mathbf{5}$;
- b) $k = 5, \quad n = \mathbf{9}$;
- c) $k = 7, \quad n = \mathbf{13}$;
- d) $k = 10, \quad n = \mathbf{19}$.

77. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy drugi, czwarty i siódmy tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 2, \quad n = 14, \quad k = \mathbf{62}$;
- b) $m = 2, \quad n = 6, \quad k = \mathbf{14}$;
- c) $m = 2, \quad n = \mathbf{6}, \quad k = 14$;
- d) $m = 3, \quad n = 98, \quad k = \mathbf{1998}$.

78. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 120 i jednym z wyrazów równym 15, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać wszystkie liczby $w \neq 15$, dla których powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 6, \quad w = 25$;
- b) $n = 8, \quad w = \mathbf{NIE}$;
- c) $n = 12, \quad w = 5$;
- d) $n = 15, \quad w = 1 \text{ lub } w = 8$.

79. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego 15-wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ jest równa $5(a_m + a_n + a_k)$. Dla podanych m, n wskazać taką liczbę naturalną k , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 1, \quad n = 10, \quad k = 13$;
- b) $m = 3, \quad n = 9, \quad k = 12$;
- c) $m = 6, \quad n = 8, \quad k = 10$;
- d) $m = 7, \quad n = 10, \quad k = 7$.

80. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest kwadratem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \mathbf{5}$;
- b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \mathbf{6}$;
- c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \mathbf{5}$;
- d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \mathbf{2}$.

81. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest sześcianem liczby całkowitej.

- a) $n = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2013}$, $k = \mathbf{1}$;
- b) $n = 2^{2011} \cdot 3^{2013} \cdot 5^{2014}$, $k = \mathbf{100}$;
- c) $n = 2^{2012} \cdot 3^{2014} \cdot 5^{2015}$, $k = \mathbf{90}$;
- d) $n = 2^{2013} \cdot 3^{2016} \cdot 5^{2016}$, $k = \mathbf{1}$.

82. Dla podanej liczby n podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k taką, że liczba nk jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

- a) $n = 24^{2013}$, $k = \mathbf{54}$;
- b) $n = 24^{2014}$, $k = \mathbf{36}$;
- c) $n = 24^{2015}$, $k = \mathbf{24}$;
- d) $n = 24^{2016}$, $k = \mathbf{1}$.

83. Wypisać w kolejności rosnącej wszystkie takie liczby naturalne n , że

- a) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej **22, 24, 25, 26, 28**;
- b) $20 < n < 30$, a liczba n^n jest sześcianem liczby całkowitej **21, 24, 27**;
- c) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest czwartą potęgą liczby całkowitej **32, 36**;
- d) $30 < n < 40$, a liczba n^n jest piątą potęgą liczby całkowitej **32, 35**.

84. Dla podanej liczby n podać największą liczbę całkowitą dodatnią d , dla której liczba $n!$ jest podzielna przez d^6 .

- a) $n = 10$, $d = \mathbf{2}$;
- b) $n = 15$, $d = \mathbf{6}$;
- c) $n = 20$, $d = \mathbf{24}$;
- d) $n = 25$, $d = \mathbf{120}$.

85. Podać największy wspólny dzielnik, gdzie $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ jest iloczynem liczb całkowitych dodatnich nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n .

- a) $\text{NWD}(24!!, 25^2) = \mathbf{25}$;
- b) $\text{NWD}(26!!, 27^2) = \mathbf{3^5 = 243}$;
- c) $\text{NWD}(27!!, 28^2) = \mathbf{49}$;
- d) $\text{NWD}(29!!, 30^2) = \mathbf{15^2 = 225}$.

86. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k taką, że liczba n jest podzielna przez 125^k .

- a) $n = 20142014120142015^{11}$, $k = 3$;
- b) $n = 20142014120142025^{22}$, $k = 14$;
- c) $n = 20142014120142075^{33}$, $k = 22$;
- d) $n = 20142014120142080^{44}$, $k = 14$.

87. Dla podanej liczby naturalnej n podać największą liczbę naturalną k , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b , jeżeli iloczyn ab jest podzielny przez n , to co najmniej jeden z czynników a, b jest podzielny przez k .

- a) $n = 2^9 \cdot 33$, $k = 32$;
- b) $n = 2^9 \cdot 36$, $k = 64$;
- c) $n = 2^9 \cdot 62$, $k = 32$;
- d) $n = 2^9 \cdot 82$, $k = 41$.

88. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

- a) $2^{21} - 1$, **7**;
- b) $3^{21} - 1$, **13**;
- c) $3^{51} - 2^{51}$, **19**;
- d) $3^{51} + 1$, **7**.

89. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geq k$, że $\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$

- a) $k = 2$, $n = 8$;
- b) $k = 3$, $n = 15$;
- c) $k = 4$, $n = 24$;
- d) $k = 5$, $n = 35$.

90. Wiedząc, że $\binom{14}{4} = 1001$, $\binom{14}{5} = 2002$, $\binom{14}{6} = 3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

- a) $\binom{15}{5} = 3003$;
- b) $\binom{15}{6} = 5005$;
- c) $\binom{16}{6} = 8008$;
- d) $\binom{15}{10} = 3003$.

91. Dla podanych n, k , wskazać takie $m > k$, aby prawdziwa była równość

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{m}$$

- a) $n = 1000$, $k = 200$, $m = 801$;
- b) $n = 1500$, $k = 300$, $m = 1201$;
- c) $n = 2000$, $k = 400$, $m = 1601$;
- d) $n = 2013$, $k = 500$, $m = 1514$.

92. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$(a^{a^k})^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

- a) $a = 5, \quad k = 2, \quad n = 27$;
- b) $a = 3, \quad k = 3, \quad n = 30$;
- c) $a = 2, \quad k = 5, \quad n = 37$;
- d) $a = 3, \quad k = 4, \quad n = 85$.

93. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n jest większa o $q\%$ od liczby n . Dla podanej liczby p podać liczbę q .

- a) $p = 10, \quad q = 1000$;
- b) $p = 20, \quad q = 500$;
- c) $p = 30, \quad q = 1200$;
- d) $p = 40, \quad q = 600$.

94. Podać liczbę całkowitą dodatnią n , dla której prawdziwe jest następujące twierdzenie: W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ suma wyrazów jest równa

- a) $n \cdot a_5$ – dla $n = 9$;
- b) $n \cdot \frac{a_4 + a_7}{2}$ – dla $n = 10$;
- c) $n \cdot (2a_{12} - a_{11})$ – dla $n = 25$;
- d) $n \cdot \frac{a_{10} + a_{12}}{2}$ – dla $n = 21$.

95. Dla podanej liczby n podaj największą liczbę naturalną d o następującej własności: Dowolny postęp arytmetyczny n -wyrazowy o wyrazach całkowitych ma sumę wyrazów podzielną przez d .

- a) $n = 2013, \quad d = 2013$;
- b) $n = 2014, \quad d = 1007$;
- c) $n = 2015, \quad d = 2015$;
- d) $n = 2016, \quad d = 1008$.

96. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa $\frac{n \cdot (a_k + a_{2k})}{2}$. Dla podanej liczby k wskazać takie n , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $k = 3, \quad n = 8$;
- b) $k = 5, \quad n = 14$;
- c) $k = 7, \quad n = 20$;
- d) $k = 10, \quad n = 29$.

97. W dowolnym rosnącym postępie arytmetycznym 2013-wyrazowym o wyrazach dodatnich, w którym wyrazy drugi, czwarty i siódmy tworzą rosnący postęp geometryczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp geometryczny. Uzupełnij podane liczby tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

Wpisz **NIE**, jeżeli uważasz, że takie liczby nie istnieją.

- a) $m = 3$, $n = 8$ lub $5q-2$, $k = 18$ lub $5q^2-2$;
- b) $m = \mathbf{NIE}$, $n = 5$, $k = \mathbf{NIE}$;
- c) $m = \mathbf{NIE}$, $n = \mathbf{NIE}$, $k = 8$;
- d) $m = 3$ lub 2 , $n = 8$, $k = 18$ lub 23 .

98. W dowolnym rosnącym postępie geometrycznym 10-wyrazowym, w którym wyrazy pierwszy, trzeci i czwarty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny, także wyrazy m -ty, n -ty i k -ty tworzą (w tej właśnie kolejności) rosnący postęp arytmetyczny. Dla podanej jednej z liczb, podać dwie pozostałe tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

- a) $m = 3$, $n = 5$, $k = 6$;
- b) $m = 3$, $n = 5$, $k = 6$;
- c) $m = 7$, $n = 9$, $k = 10$;
- d) $m = 7$, $n = 9$, $k = 10$.

99. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 90, co najmniej jeden z wyrazów jest równy w .

Dla podanej liczby n podać liczbę w , dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli liczba w o żądanej własności nie istnieje.

- a) $n = 5$, $w = 18$;
- b) $n = 9$, $w = 10$;
- c) $n = 10$, $w = \mathbf{NIE}$;
- d) $n = 15$, $w = 6$.

100. Dla podanej liczby n podać przykład rosnącego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n^2 , w którym występuje wyraz równy 1.

- a) $n = 3$, **1, 3, 5**;
- b) $n = 4$, **1, 3, 5, 7** (inny przykład: **-5, 1, 7, 13**);
- c) $n = 5$, **1, 3, 5, 7, 9** (inny przykład: **-3, 1, 5, 9, 13**);
- d) $n = 7$, **1, 3, 5, 7, 9, 11, 13** (inne przykłady: **-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16** oraz **-11, -5, 1, 7, 13, 19, 25**).