Egzamin, 6.02.2017, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11. (10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

11.1. $A=\left\{\frac{1}{x^2+1} : x\in(-2,1)\right\}$ Ocena ....

$\inf A=\mathbf{1/5}$ $\sup A=\mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru A **NIE** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

11.2. $B=\left\{\sqrt{x^2-4x+4} : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf B=\mathbf{0}$ $\sup B=\mathbf{2}$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **NIE**

11.3. $C=\left\{\frac{2^n}{3^n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf C=\mathbf{0}$ $\sup C=\mathbf{2/3}$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

11.4. $D=\left\{\frac{(-2)^n}{3^n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf D=\mathbf{-2/3}$ $\sup D=\mathbf{4/9}$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

11.5. $E=\left\{\frac{(-2)^{n^2}}{3^{n^2}} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf E=\mathbf{-2/3}$ $\sup E=\mathbf{16/81}$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

Zadanie **12. (10 punktów)**
W każdym z zadań **12.1-12.10** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

12.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+5n^5}-n^5\right)=+\infty$

12.2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+5n^5}-n^6\right)=\mathbf{0}$

12.3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+6n^6}-n^6\right)=\mathbf{3}$

12.4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+7n^7}-n^6\right)=+\infty$

12.5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+7n^7}-n^7\right)=-\infty$

12.6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+6n^6}-n^3\right)=+\infty$

12.7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+6n^6}-n^4\right)=\mathbf{0}$

12.8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+8n^8}-n^4\right)=\mathbf{8/3}$

12.9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+9n^9}-n^4\right)=+\infty$

12.10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+9n^9}-n^6\right)=-\infty$

Zadanie **13. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{4n^2+21n} - \sqrt{4n^2+5n} \leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\sqrt{4n^2+21n}-\sqrt{4n^2+5n}=\frac{16n}{\sqrt{4n^2+21n}+\sqrt{4n^2+5n}}=\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}}\,.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}} \geqslant \frac{16}{\sqrt{4+21}+\sqrt{4+5}}=\frac{16}{5+3}=2=C\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}} \leqslant \frac{16}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0}}=\frac{16}{2+2}=4=2C\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C=2$.

Zadanie **14. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 9 \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} = 9\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 9(1-q) \\ c^2 = 9(1-q^2)\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$1+q = 9-9q\,,$$

$$10q = 8\,,$$

$$q = \frac{4}{5}\,,$$

skąd

$$c = 1+q = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 4/5$, $c = 9/5$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{9\cdot 4^{n-1}}{5^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 4^{n-1}}{5^n}\,.$$

Zadanie **15. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos h}{e^h-1-h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h-Ae^h+A+Ah}{he^h-h-h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-Ae^h+A}{e^h+he^h-1-2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-Ae^h}{2e^h+he^h-2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h-e^h}{3e^h+he^h}=-\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-1/3$.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-\sqrt{9x^2+6x+1}$$

na przedziale $[-2,2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=x^2-\sqrt{9x^2+6x+1}=x^2-\sqrt{(3x+1)^2}=x^2-|3x+1|$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x-1 & \text{dla} \quad x\in[-1/3,2] \\ x^2+3x+1 & \text{dla} \quad x\in[-2,-1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2,2]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{dla} \quad x\in(-1/3,2) \\ 2x+3 & \text{dla} \quad x\in(-2,-1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/3,2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x-3=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3,2)$.

2° W przypadku $x\in(-2,-1/3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+3=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2,-1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2)=-1\,,$$
$$f(-3/2)=-5/4\,,$$
$$f(-1/3)=1/9\,,$$
$$f(3/2)=-13/4\,,$$
$$f(2)=-3=-12/4\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-13/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą $1/9$ w punkcie $-1/3$.

Zadanie **21.** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **21.1-21.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

21.1. $A=\left\{\frac{m^2}{n^2} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$ Ocena ....

$\inf A=\mathbf{4}$ $\sup A=\mathbf{9}$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

21.2. $B=\left\{\frac{m^2}{n^2} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^4\leqslant m^4\leqslant 49n^4\right\}$ Ocena ....

$\inf B=\mathbf{5}$ $\sup B=\mathbf{7}$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **NIE**

21.3. $C=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^{18^2\cdot n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{2^{11}\cdot n}\cdot n^m\right\}$ Ocena ....

$\inf C=\mathbf{81}$ $\sup C=\mathbf{256}$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

21.4. $D=\{\log_x 8 : x\in[2,+\infty)\}$ Ocena ....

$\inf D=\mathbf{0}$ $\sup D=\mathbf{3}$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

21.5. $E=\{\log_x 32 : x\in(0,1/2]\}$ Ocena ....

$\inf E=\mathbf{-5}$ $\sup E=\mathbf{0}$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

Zadanie **22.** **(10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{16}\cdot n<2^n+2^{20}\,.$$

Rozwiązanie:
Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 16$.

Dla $n\leqslant 16$ zachodzą nierówności

$$2^{16}\cdot n\leqslant 2^{16}\cdot 16=2^{16}\cdot 2^4=2^{20}<2^n+2^{20}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 16$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=16$ prawdziwość dowodzonej nierówności została już udowodniona w przypadku pierwszym.

2° Niech $n\geqslant 16$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{16}\cdot n<2^n+2^{20}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{16}\cdot(n+1)<2^{n+1}+2^{20}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 16$ otrzymujemy

$$L=2^{16}\cdot(n+1)=2^{16}\cdot n+2^{16}<2^n+2^{20}+2^{16}\leqslant 2^n+2^{20}+2^n=2^{n+1}+2^{20}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **23. (10 punktów)**
Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}\right).$$

Rozwiązanie:
Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}=\frac{\sqrt{n^2+8n+16}}{\sqrt{n^4+6n^3+9n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n^3+8n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2\cdot(4n+8)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{4n+8}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}$$

i w konsekwencji ma $4n+9$ składników. Szacujemy ją obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}\leqslant\sum_{k=0}^{4n+8}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}\leqslant(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}=\frac{(4n+9)\cdot n}{n^2+3n}=\frac{4+\frac{9}{n}}{1+\frac{3}{n}}\to 4$$

oraz

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}=\frac{(4n+9)\cdot(n+4)}{n^2+n}=\frac{\left(4+\frac{9}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Zadanie **24. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x,y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{1}{\pi}(x^\pi+\pi)^{1/\pi-1}\cdot\pi x^{\pi-1}\right|=\frac{x^{\pi-1}}{(x^\pi+\pi)^{1-1/\pi}}=\frac{x^{\pi-1}}{(x^\pi+\pi)^{(\pi-1)/\pi}}=\frac{(x^\pi)^{(\pi-1)/\pi}}{(x^\pi+\pi)^{(\pi-1)/\pi}}=$$

$$=\left(\frac{x^\pi}{x^\pi+\pi}\right)^{(\pi-1)/\pi}<1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **25. (10 punktów)**
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106 \qquad \text{czy} \qquad 6\cdot\operatorname{arctg} 104\ ?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ jest malejąca na przedziale $(0,+\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1+a_2+a_3=1$ zachodzi

$$f(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)>a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+a_3f(x_3)\ ,$$

co dla $x_1=100$, $x_2=103$, $x_3=106$, $a_1=1/6$, $a_2=1/3$, $a_3=1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104)>\frac{f(100)}{6}+\frac{f(103)}{3}+\frac{f(106)}{2}\ ,$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\frac{100}{6}+\frac{103}{3}+\frac{106}{2}=\frac{100+2\cdot 103+3\cdot 106}{6}=\frac{624}{6}=104\,.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x)=\operatorname{arctg} x$ otrzymujemy

$$6\cdot\operatorname{arctg} 104>\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106\,.$$

Uwaga:
Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106\approx\mathbf{9{,}367060}$$

oraz

$$6\cdot\operatorname{arctg} 104\approx\mathbf{9{,}367087}\,.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

Zadanie **26. (10 punktów)**

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x > \frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2017\cdot\sin^{2016}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3\cdot\sin x+\sin^{2017}(3x)\cdot\cos x=$$
$$=6051\cdot\sin^{2016}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin x+\sin^{2017}(3x)\cdot\cos x\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=6051\cdot\sin^{2016}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin^{2017}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=6051\cdot 1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6)\neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.

Uwaga:

Ponieważ $f'(\pi/6)>0$, funkcja f ma maksimum lokalne (i jak się okazuje, globalne) na prawo od $\pi/6$. Jednak dokładniejsze jego zbadanie bez użycia komputera okazuje się niezwykle trudne. Pochodna funkcji f zeruje się bowiem w punkcie (w przybliżeniu) $\pi/6+0{,}0000954$, a sama funkcja f osiąga tam maksimum w przybliżeniu równe $0{,}5000413$. Jest to wartość tak nieznacznie przekraczająca $1/2$, że niewyobrażalne wydaje się rozwiązanie zadania przez bezpośrednie szacowanie wartości funkcji f w konkretnym punkcie.

Jeśli posuniemy się nieco dalej na prawo od punktu $\pi/6$, zobaczymy, że funkcja f dosyć szybko maleje, mamy na przykład

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0{,}001\right)\approx 0{,}49634$$

oraz

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0{,}01\right)\approx 0{,}20519\,.$$

Zadanie **31.** **(10 punktów)**
Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+(2k-1)n+(k-1)k}{n^4+k^3}}\,.$$

Rozwiązanie:
Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki pierwiastkowanych wyrażeń, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki przez wspólną wielkość, a liczniki przez możliwie proste wyrażenia, które później uda się wysumować.

Szacowanie od dołu, z wykorzystaniem wzoru na sumę postępu arytmetycznego, prowadzi do:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+(2k-1)n+(k-1)k}{n^4+k^3}}\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+(2k-2)n+(k-1)^2}{n^4+n^3}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{(n+k-1)^2}}{\sqrt{n^4+n^3}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n+k-1)}{\sqrt{n^4+n^3}}=\frac{(n-1)\cdot(n+(2n-2))/2}{\sqrt{n^4+n^3}}=\frac{(n-1)\cdot(3n-2)}{2\cdot\sqrt{n^4+n^3}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+(2k-1)n+(k-1)k}{n^4+k^3}}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+2kn+k^2}{n^4+0}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{(n+k)^2}}{n^2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n+k)}{n^2}=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot((n+1)+(2n-1))/2}{n^2}=\frac{(n-1)\cdot 3n}{2n^2}=\frac{3\cdot(n-1)}{2n}=c_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{(n-1)\cdot(3n-2)}{2\cdot\sqrt{n^4+n^3}}=\frac{(1-\frac{1}{n})\cdot(3-\frac{2}{n})}{2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\to\frac{3}{2}$$

oraz

$$c_n=\frac{3\cdot(n-1)}{2n}=\frac{3\cdot(1-\frac{1}{n})}{2}\to\frac{3}{2}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 3/2.

Zadanie **32. (10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$(n+1)^{n+3} \cdot (n+2)^{n-1} < n^{n+1} \cdot (n+3)^{n+1} .$$

Rozwiązanie:
Przepiszmy dowodzoną nierówność w postaci równoważnej

$$\Big((n+1)^2\Big)^2 \cdot \Big((n+1)\cdot(n+2)\Big)^{n-1} < \Big(n\cdot(n+3)\Big)^{n+1} ,$$

$$\Big(n^2+2n+1\Big)^2 \cdot \Big(n^2+3n+2\Big)^{n-1} < \Big(n^2+3n\Big)^{n+1} ,$$

Ponieważ po każdej ze stron powyższej nierówności występuje iloczyn $n+1$ czynników dodatnich o takiej samej sumie równej n^3+4n^2+3n, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe (jest to przeformułowanie nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną).

Zadanie **33. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{mnk}{m^4+n^4+8k^2+1} : m,n,k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Każdy element zbioru jest dodatni, a przyjęcie $m=k=1$ prowadzi do ciągu $\left(\frac{n}{n^4+10}\right)_{n=1}^{\infty}$ elementów zbioru, zbieżnego do 0. Zatem kres dolny zbioru jest równy 0.

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $m^4/2$, $n^4/2$, $2k^2$ i $2k^2$ otrzymujemy

$$mnk=\sqrt[4]{m^4n^4k^4}\leqslant\frac{m^4/2+n^4/2+4k^2}{4}=\frac{m^4+n^4+8k^2}{8}<\frac{m^4+n^4+8k^2+1}{8},$$

a w konsekwencji

$$\frac{mnk}{m^4+n^4+8k^2+1}<\frac{1}{8}.$$

Zatem wszystkie elementy danego zbioru są mniejsze od 1/8.

Przyjmując $m^4/2=n^4/2=2k^2$, czyli $m=n=2p$ oraz $k=n^2/2=2p^2$, gdzie parametr p przebiega liczby naturalne, otrzymujemy

$$\frac{mnk}{m^4+n^4+8k^2+1}=\frac{8p^4}{16p^4+16p^4+8\cdot 4p^4+1}=\frac{8p^4}{64p^4+1}\to\frac{1}{8}$$

przy $p\to\infty$. Tak więc kres górny zbioru jest równy 1/8.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/8.

Zadanie **34. (10 punktów)**

Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=x^5+x\,.$$

Podać dwie pary liczb (n,w), gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną dodatnią, spełniające równanie

$$f''(n)=w\,.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

Punktacja: Po **5 punktów** za każdą poprawnie podaną parę.

$$f''(\mathbf{2})=-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{6^3}}=-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{216}}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}}$$

$$f''(\mathbf{34})=-\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81^3}}=-\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{3^{12}}}$$

Uwaga:

Treść zadania zawiera błąd: liczba w ma być "wymierna", a nie "wymierna dodatnia".

Zadanie **35. (10 punktów)**

Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ spełnia warunki $f(1)=-2/3$ oraz $f(2)=-2/5$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=(f(x))^2$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wynika.

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ określoną wzorem $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. Wówczas $g(1)=-3/2$ i $g(2)=-5/2$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(1,2)$, że

$$g'(c)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=\frac{-5/2-(-3/2)}{1}=-1\,.$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,,$$

skąd

$$-\frac{f'(c)}{(f(c))^2}=-1\,,$$

czyli

$$f'(c)=(f(c))^2\,.$$

Zadanie **36. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)} + (n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając z równości

$$\frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}+(n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot\sqrt{n\cdot(n+2)}+\sqrt{(n+1)^2}\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot\left(\sqrt{n\cdot(n+2)}+\sqrt{(n+1)^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+2n+1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\frac{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n\cdot(n+2)}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(n+1)^2}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}-\frac{\sqrt{n\cdot(n+2)}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

przekształcamy N-tą sumę częściową danego szeregu:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)} + (n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2}{1}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{5}{4}}\right)+\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)+\left(\sqrt{\frac{6}{5}}-\sqrt{\frac{7}{6}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\sqrt{\frac{N-1}{N-2}}-\sqrt{\frac{N}{N-1}}\right)+\left(\sqrt{\frac{N}{N-1}}-\sqrt{\frac{N+1}{N}}\right)+\left(\sqrt{\frac{N+1}{N}}-\sqrt{\frac{N+2}{N+1}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1}}-\sqrt{\frac{N+2}{N+1}}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{N+2}{N+1}}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $\sqrt{2}-1$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $\sqrt{2}-1$.