Egzamin, 6.02.2017, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11. (10 punktów)**

W każdym z zadań **11.1-11.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

11.1. $A=\left\{\frac{1}{x^2+1} : x\in(-2,1)\right\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

11.2. $B=\left\{\sqrt{x^2-4x+4} : x\in(0,3)\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

11.3. $C=\left\{\frac{2^n}{3^n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

11.4. $D=\left\{\frac{(-2)^n}{3^n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

11.5. $E=\left\{\frac{(-2)^{n^2}}{3^{n^2}} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **12. (10 punktów)**
W każdym z zadań **12.1-12.10** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

12.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+5n^5}-n^5\right)=$ ....

12.2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+5n^5}-n^6\right)=$ ....

12.3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+6n^6}-n^6\right)=$ ....

12.4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+7n^7}-n^6\right)=$ ....

12.5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^{12}+7n^7}-n^7\right)=$ ....

12.6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+6n^6}-n^3\right)=$ ....

12.7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+6n^6}-n^4\right)=$ ....

12.8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+8n^8}-n^4\right)=$ ....

12.9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+9n^9}-n^4\right)=$ ....

12.10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+9n^9}-n^6\right)=$ ....

Zadanie **13. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{4n^2+21n} - \sqrt{4n^2+5n} \leqslant 2C\,.$$

Zadanie **14. (10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

Zadanie **15. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{e^x - 1 - x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Zadanie **16. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2+6x+1}$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie **21.** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **21.1-21.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

21.1. $A=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 8n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$ Ocena ....

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

21.2. $B=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 25n^4\leqslant m^4\leqslant 49n^4\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

21.3. $C=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 3^{18^2\cdot n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{2^{11}\cdot n}\cdot n^m\right\}$ Ocena ....

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

21.4. $D=\{\log_x 8: x\in[2,+\infty)\}$ Ocena ....

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

21.5. $E=\{\log_x 32: x\in(0,1/2]\}$ Ocena ....

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **22.** **(10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{16}\cdot n < 2^n + 2^{20}\,.$$

Zadanie **23.** **(10 punktów)**
Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}\right).$$

Zadanie **24.** **(10 punktów)**
Dana jest funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Zadanie **25.** **(10 punktów)**
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\operatorname{arctg}100+2\cdot\operatorname{arctg}103+3\cdot\operatorname{arctg}106 \qquad \text{czy} \qquad 6\cdot\operatorname{arctg}104\ ?$$

Zadanie **26.** **(10 punktów)**
Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x>\frac{1}{2}\,.$$

Zadanie **31. (10 punktów)**
Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+(2k-1)n+(k-1)k}{n^4+k^3}}\,.$$

Zadanie **32. (10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność
$$(n+1)^{n+3}\cdot(n+2)^{n-1}<n^{n+1}\cdot(n+3)^{n+1}\,.$$

Zadanie **33. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{mnk}{m^4+n^4+8k^2+1}\,:\,m,n,k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Zadanie **34. (10 punktów)**
Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem
$$g(x)=x^5+x\,.$$

Podać dwie pary liczb $(n,\,w)$, gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną dodatnią, spełniające równanie
$$f''(n)=w\,.$$
Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

Punktacja: Po **5 punktów** za każdą poprawnie podaną parę.

$f''(......)=$...... ....

$f''(......)=$...... ....

Uwaga:
Treść zadania zawiera błąd: liczba w ma być "wymierna", a nie "wymierna dodatnia".

Zadanie **35. (10 punktów)**
Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ spełnia warunki $f(1)=-2/3$ oraz $f(2)=-2/5$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=(f(x))^2$.

Zadanie **36. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,+\,(n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}\,.$$