Egzamin, 18.02.2017, godz. 9:00-11:30

Zadanie **1.** **(22 punkty)**

W każdym z zadań **1.1-1.10** podaj **w postaci uproszczonej** kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Możesz otrzymać **dodatkowe 2 punkty** za wykazanie się kulturą matematyczną przy upraszczaniu wyników – po jednym punkcie w zadaniach **1.3** i **1.4**.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

1.1. $A=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf A=\mathbf{5}$ $\sup A=\sqrt{\mathbf{27}}=\mathbf{3}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **NIE**

1.2. $B=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$ Ocena ....

$\inf B=\sqrt[3]{\mathbf{25}}$ $\sup B=\mathbf{3}$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

1.3. $C=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 16^n\leqslant 8^m\leqslant 27^n\right\}$ Ocena ....

$\inf C=\mathbf{4/3}$ $\sup C=\log_8 27=\boxed{\mathbf{\log_2 3}}$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

1.4. $D=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 16^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$ Ocena ....

$\inf D=\log_9 16=\boxed{\mathbf{\log_3 4=2\cdot\log_3 2}}$ $\sup D=\mathbf{3/2}$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

1.5. $E=\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf E=\mathbf{0}$ $\sup E=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

1.6. $F=\left\{\left(2-\sqrt{5}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf F=\mathbf{2-\sqrt{5}}$ $\sup F=\left(\mathbf{2-\sqrt{5}}\right)^{\mathbf{2}}=\mathbf{9-4\sqrt{5}}$

Czy kres dolny należy do zbioru F **TAK** Czy kres górny należy do zbioru F **TAK**

1.7. $G=\left\{\binom{50}{n} : n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$ Ocena ....

$\inf G=\mathbf{1}$ $\sup G=\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{25}}$

Czy kres dolny należy do zbioru G **TAK** Czy kres górny należy do zbioru G **TAK**

1.8. $H=\left\{\binom{50}{n}\cdot(-1)^n : n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$ Ocena ....

$\inf H=-\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{25}}$ $\sup H=\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{24}}=\binom{\mathbf{50}}{\mathbf{26}}$

Czy kres dolny należy do zbioru H **TAK** Czy kres górny należy do zbioru H **TAK**

1.9. $I=\left\{\sqrt{x^2+2x+1} : x\in(-5,\,2)\right\}$ Ocena ....

$\inf I=\mathbf{0}$ $\sup I=\mathbf{4}$

Czy kres dolny należy do zbioru I **TAK** Czy kres górny należy do zbioru I **NIE**

1.10. $J=\left\{\sqrt[4]{x^2+2x+1} : x\in(-5,\,2)\right\}$ Ocena ....

$\inf J=\mathbf{0}$ $\sup J=\mathbf{2}$

Czy kres dolny należy do zbioru J **TAK** Czy kres górny należy do zbioru J **NIE**

Zadanie **2. (10 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{9n^2+40n} - \sqrt{9n^2+16n} \leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\sqrt{9n^2+40n} - \sqrt{9n^2+16n} = \frac{24n}{\sqrt{9n^2+40n} + \sqrt{9n^2+16n}} = \frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\,.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}} \geqslant \frac{24}{\sqrt{9+40}+\sqrt{9+16}} = \frac{24}{7+5} = 2 = C\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}} \leqslant \frac{24}{\sqrt{9+0}+\sqrt{9+0}} = \frac{24}{3+3} = 4 = 2C\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C=2$.

Zadanie **3. (10 punktów)**
Wyznaczyć takie liczby rzeczywiste p i A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{px}-p\cdot e^{x}+1}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości parametrów p i A.

Rozwiązanie:
Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{ph}-p\cdot e^{h}+1}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{ph}-p\cdot e^{h}+1-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-p}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $p=2$. Wówczas możemy zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2\cdot e^{h}+1-Ah^2}{h^3}\overset{\text{d'H}}{=}\frac{2e^{2h}-2\cdot e^{h}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-2\cdot e^{h}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-2\cdot e^{h}}{6}=\frac{6}{6}=1\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $p=2$, $A=1$ i wówczas $f'(0)=1$.

Zadanie **4.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{16x^2-16x+4}-x^2$$

na przedziale $[-1,\,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=\sqrt{16x^2-16x+4}-x^2=\sqrt{(4x-2)^2}-x^2=|4x-2|-x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 4x-2-x^2 & \text{dla} \quad x\in[1/2,\,3] \\ -4x+2-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-1,\,1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-1,\,3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 4-2x & \text{dla} \quad x\in(1/2,\,3) \\ -4-2x & \text{dla} \quad x\in(-1,\,1/2) \end{cases}$$

W punkcie $1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(1/2,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $4-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=2$, które należy do rozważanego przedziału $(1/2,\,3)$.

2° W przypadku $x\in(-1,\,1/2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-4-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-2$, które **nie należy** do rozważanego przedziału $(-1,\,1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w czterech punktach:
- końce przedziału: -1 i 3,
- miejsce zerowe pochodnej: 2,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $1/2$.

$$f(-1)=5\,,$$
$$f(1/2)=-1/4\,,$$
$$f(2)=2\,,$$
$$f(3)=1\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/4$ w punkcie $1/2$, a wartość największą równą 5 w punkcie -1.

Zadanie **5. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{30} 81000$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{30} 81000$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{30} 81000 = \frac{m}{n}$$
$$30^{m/n} = 81000$$
$$30^m = 81000^n .$$

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{3n} \cdot 3^{4n} \cdot 5^{3n} .$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m = 3n \\ m = 4n \\ m = 3n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż wówczas mielibyśmy

$$m = 4n > 3n = m .$$

Możliwa jest też inna argumentacja: rozwiązujemy powyższy układ równań w liczbach rzeczywistych otrzymując jedyne rozwiązanie $m = n = 0$ i stwierdzamy, że nie jest to rozwiązanie w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{30} 81000$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{30} 81000$ jest niewymierna.

Zadanie **6. (28 punktów)**

a) (18 punktów) Dobrać takie liczby całkowite $A>0$ i $B>1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) (10 punktów) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+3\cdot\frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2n+1+2\cdot\frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{3}=\frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2\cdot\left(2An+A^2\right)=3\cdot\left(2(B-1)n+B^2-1\right),$$
$$4An+2A^2=6(B-1)n+3\left(B^2-1\right). \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 6(B-1)\\ 2A^2 &= 3(B^2-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A &= 3(B-1)\\ 2A^2 &= 3(B-1)(B+1)\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $A=B+1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B+2=3B-3,$$

skąd $B=5$ i $A=6$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=4n+12.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+13$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+12}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} \leqslant (4n+13)\cdot\frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2}=\frac{(4n+13)\cdot n}{(n+5)^2}=\frac{4+\frac{13}{n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 4$$

oraz

$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(4n+13)\cdot(n+6)}{(n+1)^2}=\frac{\left(4+\frac{13}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{6}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=6$, $B=5$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.