

Egzamin, **18.02.2017**, godz. 9:00-11:30Zadanie **1.** (22 punkty)

W każdym z zadań **1.1-1.10** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy, ale nie określisz poprawnie ich przynależności do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Możesz otrzymać **dodatkowe 2 punkty** za wykazanie się kulturą matematyczną przy upraszczaniu wyników – po jednym punkcie w zadaniach **1.3** i **1.4**.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$1.1. A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$1.2. B = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$1.3. C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 8^m \leq 27^n \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$1.4. D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 9^m \leq 27^n \right\} \quad \text{Ocena } \dots\dots$$

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

1.5. $E = \{(2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

1.6. $F = \{(2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf F = \dots\dots\dots \sup F = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru F Czy kres górny należy do zbioru F

1.7. $G = \left\{ \binom{50}{n} : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$ Ocena

$\inf G = \dots\dots\dots \sup G = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru G Czy kres górny należy do zbioru G

1.8. $H = \left\{ \binom{50}{n} \cdot (-1)^n : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$ Ocena

$\inf H = \dots\dots\dots \sup H = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru H Czy kres górny należy do zbioru H

1.9. $I = \{\sqrt{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2)\}$ Ocena

$\inf I = \dots\dots\dots \sup I = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru I Czy kres górny należy do zbioru I

1.10. $J = \{\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2)\}$ Ocena

$\inf J = \dots\dots\dots \sup J = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru J Czy kres górny należy do zbioru J

Zadanie 2. (10 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leq 2C.$$

Zadanie 3. (10 punktów)

Wyznaczyć takie liczby rzeczywiste p i A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{px} - p \cdot e^x + 1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości parametrów p i A .

Zadanie 4. (10 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2$$

na przedziale $[-1, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie 5. (10 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{30} 81000$ jest niewymierna.

Zadanie 6. (28 punktów)

a) (18 punktów) Dobrać takie liczby całkowite $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) (10 punktów) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.