KOLOKWIUM nr 10, 10.01.2017, godz. 9:15–10:00 KLOSZ

Zadanie **15. (10 punktów)**

Niech funkcja $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[2,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,y\geqslant 2$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{x^4y^4}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^3}{x^4y^4}+\frac{x^2y}{x^4y^4}+\frac{xy^2}{x^4y^4}+\frac{y^3}{x^4y^4}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^4}+\frac{1}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5}\right)=|x-y|\cdot\frac{4}{2^5}=|x-y|\cdot\frac{1}{8}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,y\geqslant 2$.

Nieco inna postać oszacowań:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{x^4y^4}=|x-y|\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{8}\,.$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x=y$, natomiast dla $x\neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y, a więc spełniająca nierówność $c>2$, że

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|=\left|\frac{-4}{c^5}\right|=\frac{4}{c^5}<\frac{4}{2^5}=\frac{1}{8}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Zadanie **16.** **(10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{9}{8}\,.$$

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2(1+q)^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = \dfrac{9}{8} \\ \dfrac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2} = \dfrac{9}{8}\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 8c = 9(1-q) \\ 8c^2 \cdot (1+q) = 9(1-q)\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c \cdot (1+q) = 1\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez $1+q$ daje kolejno

$$8 = 9 \cdot \left(1-q^2\right)\,,$$

$$8/9 = 1-q^2\,,$$

$$q^2 = 1/9\,,$$

skąd

$$q = 1/3, \qquad c = 1/(1+q) = 3/4\,.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{1}{4 \cdot 3^{n-2}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 3^{n-2}}\,.$$

KOLOKWIUM nr 10, 10.01.2017, godz. 9:15–10:00 CEPRY

Zadanie **15.** **(10 punktów)**

Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\,.$$

Rozwiązanie:
Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,y\geqslant 4$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{x^4y^4}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^3}{x^4y^4}+\frac{x^2y}{x^4y^4}+\frac{xy^2}{x^4y^4}+\frac{y^3}{x^4y^4}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^4}+\frac{1}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}\right)=|x-y|\cdot\frac{4}{4^5}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,y\geqslant 4$.

Nieco inna postać oszacowań:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{x^4y^4}=|x-y|\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,.$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x=y$, natomiast dla $x\neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y, a więc spełniająca nierówność $c>4$, że

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|=\left|\frac{-4}{c^5}\right|=\frac{4}{c^5}<\frac{4}{4^5}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Zadanie **16.** **(10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}.$$

Wskazówka: Poszukać szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2(1+q)^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2} = \dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 3c = 4(1-q) \\ 3c^2 \cdot (1+q) = 4(1-q). \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c \cdot (1+q) = 1,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez $1+q$ daje kolejno

$$3 = 4 \cdot \left(1 - q^2\right),$$

$$3/4 = 1 - q^2,$$

$$q^2 = 1/4,$$

skąd

$$q = 1/2, \qquad c = 1/(1+q) = 2/3.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$