KOLOKWIUM nr 11, 17.01.2017, godz. 9:15–10:00 **ADEPT**

Zadanie **17. (10 punktów)**

Udowodnić nierówności $\frac{1}{29} < \operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 7 < \frac{1}{10}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[7, 12]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (7, 12)$, że

$$\operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 7 = (12-7) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c) .$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} ,$$

z nierówności $7 < c < 12$ otrzymujemy

$$\frac{1}{29} = \frac{5}{145} = \frac{5}{12^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 7 = \frac{5}{c^2+1} \quad < \quad \frac{5}{7^2+1} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} ,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

Zadanie **18.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-20\right|$$

na przedziale $[-6,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\left|x^2-20\right|=\begin{cases} x^2-20 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-\sqrt{20}\right]\cup\left[\sqrt{20},+\infty\right) \\ -x^2+20 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{20},\sqrt{20}\right) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-20 & \text{dla } x\in\left[-6,-\sqrt{20}\right]\cup\left[\sqrt{20},5\right] \\ x-x^2+20 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{20},\sqrt{20}\right) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-6,5]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla } x\in\left(-6,-\sqrt{20}\right)\cup\left(\sqrt{20},5\right) \\ 1-2x & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{20},\sqrt{20}\right) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{20}$ i $\sqrt{20}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-6,-\sqrt{20}\right)\cup\left(\sqrt{20},5\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-6,-\sqrt{20}\right)\cup\left(\sqrt{20},5\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{20},\sqrt{20}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{20},\sqrt{20}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -6 i 5,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{20}$ i $\sqrt{20}$.

$$\begin{gathered} f(-6)=10\,, \\ f\left(-\sqrt{20}\right)=-\sqrt{20}\,, \\ f(1/2)=20{,}25\,, \\ f\left(\sqrt{20}\right)=\sqrt{20}\,, \\ f(5)=10\,. \end{gathered}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{20}=-2\sqrt{5}$ w punkcie $-\sqrt{20}=-2\sqrt{5}$, a wartość największą równą $20{,}25=81/4$ w punkcie $1/2$.

KOLOKWIUM nr 11, 17.01.2017, godz. 9:15–10:00 CHINY

Zadanie **17. (10 punktów)**

Udowodnić nierówności $\frac{1}{34} < \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 < \frac{1}{13}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[8, 13]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 13)$, że

$$\operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 = (13-8) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $8 < c < 13$ otrzymujemy

$$\frac{1}{34} = \frac{5}{170} = \frac{5}{13^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 = \frac{5}{c^2+1} \quad < \quad \frac{5}{8^2+1} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

Zadanie **18. (10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-12\right|$$

na przedziale $[-5,4]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\left|x^2-12\right|=\begin{cases} x^2-12 & \text{dla} \quad x\in\left(-\infty,-\sqrt{12}\right]\cup\left[\sqrt{12},+\infty\right) \\ -x^2+12 & \text{dla} \quad x\in\left(-\sqrt{12},\sqrt{12}\right) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-12 & \text{dla} \quad x\in\left[-5,-\sqrt{12}\right]\cup\left[\sqrt{12},4\right] \\ x-x^2+12 & \text{dla} \quad x\in\left(-\sqrt{12},\sqrt{12}\right) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,4]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla} \quad x\in\left(-5,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},4\right) \\ 1-2x & \text{dla} \quad x\in\left(-\sqrt{12},\sqrt{12}\right) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{12}$ i $\sqrt{12}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-5,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},4\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-5,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},4\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{12},\sqrt{12}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{12},\sqrt{12}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 4,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{12}$ i $\sqrt{12}$.

$$\begin{gathered} f(-5)=8\,, \\ f\left(-\sqrt{12}\right)=-\sqrt{12}\,, \\ f(1/2)=12{,}25\,, \\ f\left(\sqrt{12}\right)=\sqrt{12}\,, \\ f(4)=8\,. \end{gathered}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$ w punkcie $-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$, a wartość największą równą $12{,}25=49/4$ w punkcie $1/2$.