

**KOŁOKWIUM nr 12, 24.01.2017, godz. 9:15–10:00 ABEL****Zadanie 19. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cdot e^{3x} - 3 \cdot e^{2x} + 1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot e^{3h} - 3 \cdot e^{2h} + 1}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^{3h} - 3 \cdot e^{2h} + 1 - Ah^2}{h^3}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 \cdot e^{3h} - 6 \cdot e^{2h} - 2Ah}{3h^2}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18 \cdot e^{3h} - 12 \cdot e^{2h} - 2A}{6h}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{6-2A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A = 3$ . Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{54 \cdot e^{3h} - 24 \cdot e^{2h}}{6} = \frac{30}{6} = 5.$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 3$  i wówczas  $f'(0) = 5$ .

**Zadanie 20. (10+2=12 punktów)**

W każdym z zadań **20.1-20.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

**PROMOCJA:** Możesz otrzymać **dotatkowe 2 punkty** za wykazanie się kulturą matematyczną przy upraszczaniu wyników – po jednym punkcie otrzymasz za zapisanie kresu w postaci, która w odpowiedziach do kolokwium będzie ujęta w ramkę.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**20.1.**  $A = \left\{ \frac{1}{2^n - 42} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$\inf A = -1/10$

$\sup A = 1/22$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

**20.2.**  $B = \left\{ \frac{1}{|2^n - 42|} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$\inf B = 0$

$\sup B = 1/10$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

**20.3.**  $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 45n^2 \leq 5m^2 \leq 49n^2 \right\}$  Ocena .....

$\inf C = 3$

$\sup C = \sqrt{49/5}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **NIE**

**20.4.**  $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 45n^4 \leq 5m^4 \leq 49n^4 \right\}$  Ocena .....

$\inf D = \sqrt[4]{9} = \boxed{\sqrt{3}}$

$\sup D = \sqrt[4]{49/5}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

**20.5.**  $E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^n \leq 16^m \leq 25^n \right\}$  Ocena .....

$\inf E = 3/4$

$\sup E = \log_{16} 25 = \boxed{\log_4 5}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **NIE**

**KOŁOKWIUM nr 12, 24.01.2017, godz. 9:15–10:00 CISY****Zadanie 19. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \cdot e^{4x} - 4 \cdot e^{3x} + 1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \cdot e^{4h} - 4 \cdot e^{3h} + 1}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot e^{4h} - 4 \cdot e^{3h} + 1 - Ah^2}{h^3}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 \cdot e^{4h} - 12 \cdot e^{3h} - 2Ah}{3h^2}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48 \cdot e^{4h} - 36 \cdot e^{3h} - 2A}{6h}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{12-2A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A = 6$ . Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{192 \cdot e^{4h} - 108 \cdot e^{3h}}{6} = \frac{84}{6} = 14.$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 6$  i wówczas  $f'(0) = 14$ .

**Zadanie 20. (10+2=12 punktów)**

W każdym z zadań **20.1-20.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

**PROMOCJA:** Możesz otrzymać **dotatkowe 2 punkty** za wykazanie się kulturą matematyczną przy upraszczaniu wyników – po jednym punkcie otrzymasz za zapisanie kresu w postaci, która w odpowiedziach do kolokwium będzie ujęta w ramkę.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$20.1. A = \left\{ \frac{1}{2^n - 50} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf A = -1/18$$

$$\sup A = 1/14$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

$$20.2. B = \left\{ \frac{1}{|2^n - 50|} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf B = 0$$

$$\sup B = 1/14$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

$$20.3. C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 49n^2 \leq 2m^2 \leq 50n^2 \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf C = \sqrt{49/2}$$

$$\sup C = 5$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

$$20.4. D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 49n^4 \leq 2m^4 \leq 50n^4 \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf D = \sqrt[4]{49/2}$$

$$\sup D = \sqrt[4]{25} = \boxed{\sqrt{5}}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

$$20.5. E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^n \leq 27^m \leq 81^n \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf E = \log_{27} 8 = \boxed{\log_3 2}$$

$$\sup E = 4/3$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **TAK**

**KOŁOKWIUM nr 12, 24.01.2017, godz. 9:15–10:00 GRUZ**
**Zadanie 19. (10 punktów)**

 Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4 \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{4x} + 1}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

 jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4 \cdot e^{5h} - 5 \cdot e^{4h} + 1}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cdot e^{5h} - 5 \cdot e^{4h} + 1 - Ah^2}{h^3}.$$

 Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20 \cdot e^{5h} - 20 \cdot e^{4h} - 2Ah}{3h^2}.$$

 Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{100 \cdot e^{5h} - 80 \cdot e^{4h} - 2A}{6h}.$$

 Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{20-2A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A = 10$ . Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{500 \cdot e^{5h} - 320 \cdot e^{4h}}{6} = \frac{180}{6} = 30.$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 10$  i wówczas  $f'(0) = 30$ .

**Zadanie 20.** (10+2=12 punktów)

W każdym z zadań **20.1-20.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

**PROMOCJA:** Możesz otrzymać **dotatkowe 2 punkty** za wykazanie się kulturą matematyczną przy upraszczaniu wyników – po jednym punkcie otrzymasz za zapisanie kresu w postaci, która w odpowiedziach do kolokwium będzie ujęta w ramkę.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**20.1.**  $A = \left\{ \frac{1}{2^n - 40} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$\inf A = -1/8$

$\sup A = 1/24$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

**20.2.**  $B = \left\{ \frac{1}{|2^n - 40|} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$\inf B = 0$

$\sup B = 1/8$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

**20.3.**  $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq 3m^2 \leq 27n^2 \right\}$  Ocena .....

$\inf C = \sqrt{25/3}$

$\sup C = 3$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

**20.4.**  $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^4 \leq 3m^4 \leq 27n^4 \right\}$  Ocena .....

$\inf D = \sqrt[4]{25/3}$

$\sup D = \sqrt[4]{9} = \boxed{\sqrt{3}}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE** Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

**20.5.**  $E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^n \leq 64^m \leq 81^n \right\}$  Ocena .....

$\inf E = 5/6$

$\sup E = \log_{64} 81 = \boxed{\log_8 9 = 2 \cdot \log_8 3}$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **TAK** Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **NIE**

KOŁOKWIUM nr **12**, 24.01.2017, godz. 9:15–10:00 **KNOT**Zadanie **19.** (10 punktów)Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{3x} + 2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .*Rozwiązanie:*

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \cdot e^{5h} - 5 \cdot e^{3h} + 2}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot e^{5h} - 5 \cdot e^{3h} + 2 - Ah^2}{h^3}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15 \cdot e^{5h} - 15 \cdot e^{3h} - 2Ah}{3h^2}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone  $\frac{0}{0}$ , możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{75 \cdot e^{5h} - 45 \cdot e^{3h} - 2A}{6h}.$$

Przy  $h \rightarrow 0$  otrzymujemy iloraz  $\frac{30-2A}{0}$ , co ma postać nieoznaczoną  $\frac{0}{0}$  dla  $A = 15$ . Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{375 \cdot e^{5h} - 135 \cdot e^{3h}}{6} = \frac{240}{6} = 40.$$

**Odpowiedź:** Funkcja  $f$  jest różniczkowalna dla  $A = 15$  i wówczas  $f'(0) = 40$ .

**Zadanie 20. (10+2=12 punktów)**

W każdym z zadań **20.1-20.5** podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

**PROMOCJA:** Możesz otrzymać **dotatkowe 2 punkty** za wykazanie się kulturą matematyczną przy upraszczaniu wyników – po jednym punkcie otrzymasz za zapisanie kresu w postaci, która w odpowiedziach do kolokwium będzie ujęta w ramkę.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$20.1. A = \left\{ \frac{1}{2^n - 53} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf A = -1/21$$

$$\sup A = 1/11$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

$$20.2. B = \left\{ \frac{1}{|2^n - 53|} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf B = 0$$

$$\sup B = 1/11$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

$$20.3. C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 18n^2 \leq 2m^2 \leq 25n^2 \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf C = 3$$

$$\sup C = \sqrt{25/2}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **NIE**

$$20.4. D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 18n^4 \leq 2m^4 \leq 25n^4 \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf D = \sqrt[4]{9} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\sup D = \sqrt[4]{25/2}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

$$20.5. E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 25^m \leq 125^n \right\} \quad \text{Ocena .....}$$

$$\inf E = \log_{25} 16 = \boxed{\log_5 4 = 2 \cdot \log_5 2}$$

$$\sup E = 3/2$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **TAK**