KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 A

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(49)+f(51) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(50)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=49$ oraz $y=51$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(49)+f(51)>2\cdot f(50)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(49)+f(51)$ jest większa od liczby $2\cdot f(50)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9=9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)=1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 B

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(50)+f(52) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(51)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=50$ oraz $y=52$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(50)+f(52)>2\cdot f(51)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(50)+f(52)$ jest większa od liczby $2\cdot f(51)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9=9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)=1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 C

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(51)+f(53) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(52)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$
$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$
$$8>\sqrt{x}\,,$$
$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=51$ oraz $y=53$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(51)+f(53)>2\cdot f(52)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(51)+f(53)$ jest większa od liczby $2\cdot f(52)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 D

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(52)+f(54) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(53)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=52$ oraz $y=54$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(52)+f(54)>2\cdot f(53)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(52)+f(54)$ jest większa od liczby $2\cdot f(53)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 E

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(53)+f(55) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(54)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=53$ oraz $y=55$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(53)+f(55)>2\cdot f(54)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(53)+f(55)$ jest większa od liczby $2\cdot f(54)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

$f_1^{(4)}(1) = \mathbf{-6}$

22.1. $f_1(x) = \ln x$ $\qquad f_1^{(4)}(2) = \mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3) = \mathbf{-2/27}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathbf{4}$

22.2. $f_2(x) = \sin x \cdot \cos x$ $\qquad f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$

$f_3^{(4)}(0) = \mathbf{-15}$

22.3. $f_3(x) = (2x+1)^{5/2}$ $\qquad f_3^{(4)}(4) = \mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12) = \mathbf{-3/25}$

$f_4^{(4)}(0) = \mathbf{9/16}$

22.4. $f_4(x) = \sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$ $\qquad f_4^{(4)}(3) = \mathbf{9/2^9 = 9/512}$

$f_4^{(4)}(8) = \mathbf{1/(16 \cdot 27) = 1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 F

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(54)+f(56) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(55)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=54$ oraz $y=56$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(54)+f(56)>2\cdot f(55)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(54)+f(56)$ jest większa od liczby $2\cdot f(55)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 G

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(55)+f(57) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(56)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=55$ oraz $y=57$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(55)+f(57)>2\cdot f(56).$$

Odpowiedź: Liczba $f(55)+f(57)$ jest większa od liczby $2\cdot f(56)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 H

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(56)+f(58) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(57)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=56$ oraz $y=58$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(56)+f(58)>2\cdot f(57)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(56)+f(58)$ jest większa od liczby $2\cdot f(57)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 I

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(57)+f(59) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(58)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=57$ oraz $y=59$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(57)+f(59)>2\cdot f(58)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(57)+f(59)$ jest większa od liczby $2\cdot f(58)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 J

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(58)+f(60) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(59)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=58$ oraz $y=60$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(58)+f(60)>2\cdot f(59)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(58)+f(60)$ jest większa od liczby $2\cdot f(59)$.

Zadanie **22. (12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 K

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(59)+f(61) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(60)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=59$ oraz $y=61$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(59)+f(61)>2\cdot f(60)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(59)+f(61)$ jest większa od liczby $2\cdot f(60)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 L

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(60)+f(62) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(61)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=60$ oraz $y=62$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(60)+f(62)>2\cdot f(61)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(60)+f(62)$ jest większa od liczby $2\cdot f(61)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9=9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)=1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 M

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61)+f(63) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(62)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=61$ oraz $y=63$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61)+f(63)>2\cdot f(62)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(61)+f(63)$ jest większa od liczby $2\cdot f(62)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 N

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65)+f(67) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(66)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=65$ oraz $y=67$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65)+f(67)<2\cdot f(66)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(65)+f(67)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(66)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 O

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(66)+f(68) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(67)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=66$ oraz $y=68$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(66)+f(68)<2\cdot f(67)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(66)+f(68)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(67)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x) = \ln x$

$f_1^{(4)}(1) = \mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2) = \mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3) = \mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x) = \sin x \cdot \cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$

22.3. $f_3(x) = (2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0) = \mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4) = \mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12) = \mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x) = \sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0) = \mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3) = \mathbf{9/2^9} = \mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8) = \mathbf{1/(16 \cdot 27)} = \mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 P

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(67)+f(69) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(68) \ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=67$ oraz $y=69$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(67)+f(69)<2\cdot f(68).$$

Odpowiedź: Liczba $f(67)+f(69)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(68)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 Q

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(68)+f(70) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(69)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=68$ oraz $y=70$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(68)+f(70)<2\cdot f(69)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(68)+f(70)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(69)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 R

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(69)+f(71) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(70)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=69$ oraz $y=71$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(69)+f(71)<2\cdot f(70)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(69)+f(71)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(70)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 S

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(70)+f(72) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(71)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=70$ oraz $y=72$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(70)+f(72)<2\cdot f(71).$$

Odpowiedź: Liczba $f(70)+f(72)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(71)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 T

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(71)+f(73) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(72)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=71$ oraz $y=73$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(71)+f(73)<2\cdot f(72)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(71)+f(73)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(72)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 U

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(72)+f(74) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(73)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=72$ oraz $y=74$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(72)+f(74)<2\cdot f(73)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(72)+f(74)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(73)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 V

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(73)+f(75) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(74)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=73$ oraz $y=75$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(73)+f(75)<2\cdot f(74)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(73)+f(75)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(74)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 W

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(74)+f(76) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(75)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=74$ oraz $y=76$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(74)+f(76)<2\cdot f(75)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(74)+f(76)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(75)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 X

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(75)+f(77) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(76)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=75$ oraz $y=77$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(75)+f(77)<2\cdot f(76)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(75)+f(77)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(76)$.

Zadanie **22. (12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 Y

Zadanie **21. (10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(76)+f(78) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(77)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=76$ oraz $y=78$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(76)+f(78)<2\cdot f(77).$$

Odpowiedź: Liczba $f(76)+f(78)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(77)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

KOLOKWIUM nr 13, 31.01.2017, godz. 9:15–10:15 Z

Zadanie **21.** **(10 punktów)** Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x$. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(77)+f(79) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(78)\ ?$$

Rozwiązanie:
Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=77$ oraz $y=79$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(77)+f(79)<2\cdot f(78).$$

Odpowiedź: Liczba $f(77)+f(79)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(78)$.

Zadanie **22.** **(12 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.4** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg). Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

22.1. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$

$f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$

$f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

22.2. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

22.3. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$

$f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$

$f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

22.4. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$

$f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$

$f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$
