KOLOKWIUM nr 1, 17.10.2016, godz. 12:15–13:00

Zadanie **1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=4$ mamy

$$L=\binom{4}{4}=1$$

oraz

$$P=\binom{5}{5}=1.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n\geqslant 4$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+2}{5}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej równości i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+1}{5}+\binom{n+1}{4}=\binom{n+2}{5}=P.$$

Powyżej wykorzystaliśmy wzór

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\binom{m+1}{k+1}$$

dla $m=n+1$ oraz $k=4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n\geqslant 4$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$100n \leqslant 2^n + 572\,.$$

Rozwiązanie:
Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=100$$

oraz

$$P=2+572=574\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $100 \leqslant 574$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$100n \leqslant 2^n + 572\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$100 \cdot (n+1) \leqslant 2^{n+1} + 572\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=100 \cdot (n+1) = 100n+100 \leqslant 2^n+572+100 \leqslant 2^n+572+2^n = 2^{n+1}+572 = P\,,$$

o ile

$$100 \leqslant 2^n\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$n \geqslant 7\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 7$.

Dla kompletności dowodu indukcyjnego należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=7$, co okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

Ponadto należy sprawdzić lub udowodnić tę nierówność dla $n \leqslant 6$ (z ewentualnym pominięciem przypadku $n=1$, który już sprawdziliśmy sądząc, że będzie on częścią dowodu indukcyjnego).

Dla $n \leqslant 5$ otrzymujemy

$$L=100n \leqslant 100 \cdot 5 = 500 < 572 < 2^n + 572 = P\,.$$

Dla $n=6$ otrzymujemy

$$L=600 \quad \text{oraz} \quad P=64+572=636\,,$$

skąd $L<P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=7$ otrzymujemy

$$L=100 \cdot 7 = 700 \quad \text{oraz} \quad P=128+572=700\,,$$

skąd $L=P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 7$, a ponadto wykazaliśmy jej prawdziwość dla $n \leqslant 6$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 7$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 7$, to 4 punkty. Również rozwiązanie, w którym, nawet z powodu drobnego błędu rachunkowego, nie wykryto, że indukcja nie działa od samego początku, nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty**, gdyż wówczas rozwiązujący stracił możliwość wykazania, że wie, co zrobić w przypadku indukcji startującej od $n = 7$.