KOLOKWIUM nr 2, 24.10.2016, godz. 12:15–13:00

Zadanie **3. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{200}4000$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{200}4000$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{200}4000=\frac{m}{n}$$

$$200^{m/n}=4000$$

$$200^m=4000^n\,.$$

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3m}\cdot 5^{2m}=2^{5n}\cdot 5^{3n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3m & = & 5n \\ 2m & = & 3n \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$6m=2\cdot(3m)=2\cdot(5n)=10n>9n=3\cdot(3n)=3\cdot(2m)=6m\,,$$

czyli $6m>6m$, co nie jest prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{200}4000$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{200}4000$ jest niewymierna.

Zadanie **4. (10 punktów)**

a) (3 punkty) Podać przykład takich liczb niewymiernych dodatnich a, b, c, d, e, f, że liczby

$$a+b+c,\ \ b+c+d,\ \ c+d+e,\ \ d+e+f,\ \ e+f+a,\ \ f+a+b$$

są wymierne.

Rozwiązanie:

Jeden z wielu przykładów spełniających warunki zadania to

$$a=b=d=e=\sqrt{2}, \qquad c=f=3-2\sqrt{2}\,.$$

b) (7 punktów) Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że liczby

$$a+b+c,\ \ b+c+d,\ \ c+d+a,\ \ d+a+b$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba

$$(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)=3\cdot(a+b+c+d)$$

jest wymierna jako suma liczb wymiernych, także liczba $a+b+c+d$ jest wymierna (jako $1/3$ liczby wymiernej). Stąd wynika, że liczba $a=(a+b+c+d)-(b+c+d)$ jest wymierna jako różnica liczb wymiernych.

Uwaga:

Rozwiązanie można też oprzeć na tożsamości

$$a=\frac{(a+b+c)-2(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)}{3}\,,$$

którą można odczytać z przedstawionych wyżej rachunków lub uzyskać w inny sposób. Należy przy tym wyraźnie zaznaczyć, że wyrażenie po prawej stronie powyższej tożsamości daje liczbę wymierną, jeśli cztery sumy w nawiasach są liczbami wymiernymi.