KOLOKWIUM nr 4, 14.11.2016, godz. 12:15–13:00

Zadanie **6. (20 punktów)**

W każdym z zadań **6.1–6.18** wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 10000, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10\,000}, 10^{20\,000}, 10^{50\,000}, 10^{100\,000}, 10^{200\,000}, 10^{500\,000}, 10^{1\,000\,000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Punktacja:

• za każde poprawnie rozwiązane zadanie: **1 punkt**
• premia za szlemika (17 poprawnie rozwiązanych zadań): **1 punkt**
• premia za szlema (18 poprawnie rozwiązanych zadań): **2 punkty**

6.1. $$\mathbf{3} < \sqrt{10^{10}+10^{6}}-10^{5} < \mathbf{5}$$

6.2. $$\mathbf{30} < \sqrt{10^{10}+10^{7}}-10^{5} < \mathbf{50}$$

6.3. $$\mathbf{300} < \sqrt{10^{10}+10^{8}}-10^{5} < \mathbf{500}$$

6.4. $$\mathbf{30} < \sqrt{10^{20}+10^{12}}-10^{10} < \mathbf{50}$$

6.5. $$\mathbf{3000} < \sqrt{10^{20}+10^{14}}-10^{10} < \mathbf{5000}$$

6.6. $$\mathbf{10^5} < \sqrt{10^{20}+10^{16}}-10^{10} < \mathbf{10^6}$$

6.7. $\mathbf{10^9} < \sqrt{10^{100}+10^{60}}-10^{50} < \mathbf{10^{10}}$

6.8. $\mathbf{10^{10}} < \sqrt{10^{100}+10^{70}}-10^{50} < \mathbf{10^{20}}$

6.9. $\mathbf{10^{20}} < \sqrt{10^{100}+10^{80}}-10^{50} < \mathbf{10^{50}}$

6.10. $\mathbf{10^9} < \sqrt{10^{20}+10^{14}}-10^{9} < \mathbf{10^{10}}$

6.11. $\mathbf{10^9} < \sqrt{10^{20}+10^{14}}-10^{6} < \mathbf{10^{10}}$

6.12. $\mathbf{10^{10}} < \sqrt{10^{20}+10^{14}}-10^{3} < \mathbf{10^{20}}$

6.13. $\mathbf{30} < \sqrt[3]{10^{24}+10^{18}}-10^{8} < \mathbf{50}$

6.14. $\mathbf{300} < \sqrt[3]{10^{24}+10^{19}}-10^{8} < \mathbf{500}$

6.15. $\mathbf{3000} < \sqrt[3]{10^{24}+10^{20}}-10^{8} < \mathbf{5000}$

6.16. $\mathbf{0} < \sqrt[4]{10^{24}+10^{18}}-10^{6} < \mathbf{1}$

6.17. $\mathbf{2} < \sqrt[4]{10^{24}+10^{19}}-10^{6} < \mathbf{3}$

6.18. $\mathbf{20} < \sqrt[4]{10^{24}+10^{20}}-10^{6} < \mathbf{30}$

Rozwiązanie:
Dla uzyskania wymaganych oszacowań należy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

W poniższych rachunkach zakładamy, że liczby n i k są dodatnie.

Zadania 6.1 – 6.9

Szacowane wyrażenia są postaci $\sqrt{n^2+k}-n$, gdzie $k<n^2$, a nawet $k \ll n^2$ (znacznie mniejsze). Wzór na różnicę kwadratów daje

$$\sqrt{n^2+k}-n=\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}=\frac{k/n}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}<\frac{k/n}{2},$$

przy czym wobec $k \ll n^2$, w końcowej nierówności mamy przybliżoną równość. Jest to stwierdzenie nieprecyzyjne, ale wystarczy do udzielenia właściwych odpowiedzi. Na przykład w zadaniu **6.1** wiedza, że podana liczba jest troszeczkę mniejsza od 5, wystarczy do umieszczenia jej w przedziale $(3,5)$.

Precyzyjne oszacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $\sqrt{x}<x$ dla $x>1$ i wygląda następująco:

$$\frac{k/n}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}>\frac{k/n}{1+\frac{k}{n^2}+1}=\frac{k/n}{2+\frac{k}{n^2}}>\frac{k/n}{3},$$

o ile $k<n^2$ (w zupełności wystarczy do uzyskania oszacowań wymaganych w treści zadania).

Zadania 6.10 – 6.12

Z rozwiązania zadania **6.5** wiemy, że

$$10^{10}+3000<\sqrt{10^{20}+10^{14}}<10^{10}+5000,$$

co wystarczy do udzielenia poprawnych odpowiedzi.

Zadania 6.13 – 6.15

Wzór na różnicę sześcianów daje po przekształceniach

$$\sqrt[3]{n^3+k}-n=\frac{k/n^2}{\left(1+\frac{k}{n^3}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{k}{n^3}\right)^{1/3}+1}<\frac{k/n^2}{3},$$

przy czym dla $k \ll n^3$ końcowa nierówność jest przybliżoną równością, co wystarczy do udzielenia poprawnych odpowiedzi.

Precyzyjne szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $x^w<x$ dla $x>1$ i $0<w<1$:

$$\frac{k/n^2}{\left(1+\frac{k}{n^3}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{k}{n^3}\right)^{1/3}+1}>\frac{k/n^2}{1+\frac{k}{n^3}+1+\frac{k}{n^3}+1}=\frac{k/n^2}{3+\frac{2k}{n^3}}>\frac{k/n^2}{3+\frac{1}{3}},$$

o ile $\frac{k}{n^3}<\frac{1}{6}$.

Liczba $3+\frac{1}{3}$ w mianowniku dolnego oszacowania wynika z treści zadania, na przykład w zadaniu **6.13** potrzebujemy oszacowania od dołu przez liczbę 30.

Zadania 6.16 – 6.18

Sposób I:

Wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}$$

daje po przekształceniach

$$\sqrt[4]{n^4+k}-n=\frac{k/n^3}{\left(\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/2}+1\right)\cdot\left(\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/4}+1\right)}<\frac{k/n^3}{4}\,,$$

przy czym dla $k\ll n^4$ końcowa nierówność jest przybliżoną równością, co wystarczy do udzielenia poprawnych odpowiedzi.

Precyzyjne szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $x^w<x$ dla $x>1$ i $0<w<1$:

$$\frac{k/n^3}{\left(\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/2}+1\right)\cdot\left(\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/4}+1\right)}>\frac{k/n^3}{\left(1+\frac{k}{n^4}+1\right)\cdot\left(1+\frac{k}{n^4}+1\right)}=$$

$$=\frac{k/n^3}{\left(2+\frac{k}{n^4}\right)^2}>\frac{k/n^3}{\left(2+\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{k/n^3}{(2{,}2)^2}=\frac{k/n^3}{4{,}84}>\frac{k/n^3}{5}\,,$$

o ile $\frac{k}{n^4}<\frac{1}{5}$.

Liczba 5 w mianowniku dolnego oszacowania wynika z treści zadania, na przykład w zadaniu **6.17** potrzebujemy oszacowania od dołu przez liczbę 2.

Sposób II:

Wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$$

daje po przekształceniach

$$\sqrt[4]{n^4+k}-n=\frac{k/n^3}{\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{3/4}+\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/2}+\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/4}+1}<\frac{k/n^3}{4}\,,$$

przy czym dla $k\ll n^4$ końcowa nierówność jest przybliżoną równością, co wystarczy do udzielenia poprawnych odpowiedzi.

Precyzyjne szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $x^w<x$ dla $x>1$ i $0<w<1$:

$$\frac{k/n^3}{\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{3/4}+\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/2}+\left(1+\frac{k}{n^4}\right)^{1/4}+1}>\frac{k/n^3}{1+\frac{k}{n^4}+1+\frac{k}{n^4}+1+\frac{k}{n^4}+1}=\frac{k/n^3}{4+\frac{3k}{n^4}}>\frac{k/n^3}{5}\,,$$

o ile $\frac{k}{n^4}<\frac{1}{3}$.

Liczba 5 w mianowniku dolnego oszacowania wynika z treści zadania, na przykład w zadaniu **6.18** potrzebujemy oszacowania od dołu przez liczbę 20.