KOLOKWIUM nr 51, 4.11.2016, godz. 8:15–9:00

Zadanie **51.** **(10 punktów)**

Udowodnić nierówność

$$n^{n^{2^{1000}}} < 2^{2^n}$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $n=2^{2^k}$, gdzie k jest liczbą naturalną. Dana w zadaniu nierówność przyjmuje wówczas postać

$$\left(2^{2^k}\right)^{\left(2^{2^k}\right)^{2^{1000}}} < 2^{2^{2^{2^k}}},$$

co po uproszczeniu sprowadza się do

$$2^{2^{k+2^{k+1000}}} < 2^{2^{2^{2^k}}}. \tag{1}$$

Dwukrotne zlogarytmowanie przy podstawie 2 nierówności (1) prowadzi do nierówności równoważnej

$$k+2^{k+1000} < 2^{2^k}. \tag{2}$$

Zauważmy, że nierówność (2) jest spełniona dla $k=10$, gdyż wówczas mamy

$$L=10+2^{1010} < 2^4+2^{1010} < 2^{1010}+2^{1010} = 2^{1011} < 2^{1024} = P.$$

Odpowiedź:

Przykładem liczby spełniającej warunki zadania jest $n=2^{2^{10}}=2^{1024}$.

Zadanie **52. (10 punktów)**

a) (3 punkty) Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, że liczby

$$a+b+c,\quad b+c+d,\quad c+d+e,\quad d+e+a,\quad e+a+b$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z równości

$$a=\frac{2(a+b+c)-(b+c+d)-(c+d+e)+2(d+e+a)-(e+a+b)}{3}$$

oraz z uwagi, że wyrażenie po prawej stronie daje liczbę wymierną, jeśli sumy w nawiasach są liczbami wymiernymi.

b) (7 punktów) Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f, g, że liczby

$$a+b+c+d+e,\quad b+c+d+e+f,\quad c+d+e+f+g,\quad d+e+f+g+a,$$
$$e+f+g+a+b,\quad f+g+a+b+c,\quad g+a+b+c+d$$

są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z równości

$$a=\Big(3(a+b+c+d+e)-2(b+c+d+e+f)-2(c+d+e+f+g)+3(d+e+f+g+a)-$$
$$-2(e+f+g+a+b)+3(f+g+a+b+c)-2(g+a+b+c+d)\Big)/5$$

oraz z uwagi, że wyrażenie po prawej stronie daje liczbę wymierną, jeśli sumy w nawiasach są liczbami wymiernymi.

Powyższą tożsamość można uzyskać różnymi sposobami, jednym z nich jest skorzystanie z następujących równości:

$$a+b+c+d+e+f+g=\Big((a+b+c+d+e)+(b+c+d+e+f)+(c+d+e+f+g)+$$
$$+(d+e+f+g+a)+(e+f+g+a+b)+(f+g+a+b+c)+(g+a+b+c+d)\Big)/5\,,$$

$$b+c=(a+b+c+d+e+f+g)-(d+e+f+g+a)\,,$$

$$d+e=(a+b+c+d+e+f+g)-(f+g+a+b+c)\,,$$

$$a=(a+b+c+d+e)-(b+c)-(d+e)\,.$$

Rozwiązanie zadania na podstawie powyższych równości nie wymaga wypisywania tożsamości podanej na początku rozwiązania – wystarczy zauważyć, że wynika z nich kolejno wymierność następujących liczb:

$a+b+c+d+e+f+g$, $\quad b+c$, $\quad d+e$, $\quad a$.