KOLOKWIUM nr 52, 18.11.2016, godz. 8:15–9:00

Zadanie **53. (10 punktów)** Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\,,$$

$$w-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}\,,$$

$$\left(w-\sqrt{2}\right)^3=3\,,$$

$$w^3-3w^2\cdot\sqrt{2}+6w-2\sqrt{2}=3\,,$$

$$w^3+6w-3=\left(3w^2+2\right)\cdot\sqrt{2}\,,$$

$$\frac{w^3+6w-3}{3w^2+2}=\sqrt{2}\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna (zauważmay, że mianownik $3w^2+2$ jest różny od zera jako liczba dodatnia), a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

Zadanie **54.** **(10 punktów)** Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(1+\frac{10}{n}\right)^n$$

jest rosnący.

Rozwiązanie:

Dla udowodnienia tezy zadania należy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{10}{n}\right)^n < \left(1+\frac{10}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Powyższą nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+10)^n}{n^n} < \frac{(n+11)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}},$$

czyli

$$(n+1)^{n+1}\cdot(n+10)^n < n^n\cdot(n+11)^{n+1}. \tag{1}$$

Mnożąc nierówność (1) stronami przez n otrzymujemy nierówność równoważną

$$n\cdot(n+1)^{n+1}\cdot(n+10)^n < n^{n+1}\cdot(n+11)^{n+1},$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+n\right)\cdot\left(n^2+11n+10\right)^n < \left(n^2+11n\right)^{n+1}. \tag{2}$$

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (2) występuje iloczyn $n+1$ czynników dodatnich o takiej samej sumie równej n^3+12n^2+11n, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.