KOLOKWIUM nr 53, 25.11.2016, godz. 8:15–9:00

Zadanie **55. (10 punktów)** Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{4^n+2^n}+\frac{4^n}{4^{n+1}+2^{n+1}}+\frac{4^n}{4^{n+2}+2^{n+2}}+\ldots+\frac{4^n}{4^{n+k}+2^{n+k}}+\ldots+\frac{4^n}{16^n+4^n}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do zera przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników) będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki oszacujemy przez wyrazy postępu geometrycznego o ilorazie 4.

Szacowanie od dołu (mianowniki od góry) prowadzi do:

$$b_n=\frac{4^n}{4^n+2^n}+\frac{4^n}{4^{n+1}+2^{n+1}}+\frac{4^n}{4^{n+2}+2^{n+2}}+\ldots+\frac{4^n}{4^{n+k}+2^{n+k}}+\ldots+\frac{4^n}{16^n+4^n}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{4^n}{4^n+2^n}+\frac{4^n}{4^{n+1}+2^{n+2}}+\frac{4^n}{4^{n+2}+2^{n+4}}+\ldots+\frac{4^n}{4^{n+k}+2^{n+2k}}+\ldots+\frac{4^n}{16^n+8^n}=$$
$$=\frac{4^n}{4^n+2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^k}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry (mianowniki od dołu) otrzymujemy:

$$b_n=\frac{4^n}{4^n+2^n}+\frac{4^n}{4^{n+1}+2^{n+1}}+\frac{4^n}{4^{n+2}+2^{n+2}}+\ldots+\frac{4^n}{4^{n+k}+2^{n+k}}+\ldots+\frac{4^n}{16^n+4^n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4^n}{4^n+1}+\frac{4^n}{4^{n+1}+2^2}+\frac{4^n}{4^{n+2}+2^4}+\ldots+\frac{4^n}{4^{n+k}+2^{2k}}+\ldots+\frac{4^n}{16^n+4^n}=$$
$$=\frac{4^n}{4^n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^k}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=c_n\,.$$

W uzyskanych oszacowaniach występuje suma tego samego postępu geometrycznego $n+1$-wyrazowego o pierwszym wyrazie 1 i ilorazie 1/4. Ze wzoru na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^k}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3/4}=\frac{4-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{3}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{4^n}{4^n+2^n}\cdot\frac{4-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{3}=\frac{1}{1+2^{-n}}\cdot\frac{4-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{3}\to\frac{4}{3}$$

oraz

$$c_n=\frac{4^n}{4^n+1}\cdot\frac{4-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{3}=\frac{1}{1+4^{-n}}\cdot\frac{4-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{3}\to\frac{4}{3}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 4/3.

Zadanie **56.** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{n^{12}+1}}+\frac{\sqrt{16+8}}{\sqrt{n^{12}+2^5}}+\frac{\sqrt{81+18}}{\sqrt{n^{12}+3^5}}+\ldots+\frac{\sqrt{k^4+2k^2}}{\sqrt{n^{12}+k^5}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^8+2n^4}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki przez wspólną wielkość, a liczniki przez możliwie proste wyrażenia, które później uda się wysumować.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n=\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{n^{12}+1}}+\frac{\sqrt{16+8}}{\sqrt{n^{12}+2^5}}+\frac{\sqrt{81+18}}{\sqrt{n^{12}+3^5}}+\ldots+\frac{\sqrt{k^4+2k^2}}{\sqrt{n^{12}+k^5}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^8+2n^4}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}+\frac{\sqrt{16+0}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}+\frac{\sqrt{81+0}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}+\ldots+\frac{\sqrt{k^4+0}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^8+0}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}=$$

$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^4}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}=\frac{\frac{n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)}{6}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}=\frac{n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)}{6\cdot\sqrt{n^{12}+n^{10}}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{n^{12}+1}}+\frac{\sqrt{16+8}}{\sqrt{n^{12}+2^5}}+\frac{\sqrt{81+18}}{\sqrt{n^{12}+3^5}}+\ldots+\frac{\sqrt{k^4+2k^2}}{\sqrt{n^{12}+k^5}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^8+2n^4}}{\sqrt{n^{12}+n^{10}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{1+2+1}}{\sqrt{n^{12}+0}}+\frac{\sqrt{16+8+1}}{\sqrt{n^{12}+0}}+\frac{\sqrt{81+18+1}}{\sqrt{n^{12}+0}}+\ldots+\frac{\sqrt{k^4+2k^2+1}}{\sqrt{n^{12}+0}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^8+2n^4+1}}{\sqrt{n^{12}+0}}=$$

$$=\frac{(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)+\ldots+(k^2+1)+\ldots+(n^4+1)}{n^6}=$$

$$=\frac{n^2+\frac{n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)}{6}}{n^6}=\frac{6n^2+n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)}{6\cdot n^6}=c_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)}{6\cdot\sqrt{n^{12}+n^{10}}}=\frac{(1+n^{-2})\cdot(2+n^{-2})}{6\cdot\sqrt{1+n^{-2}}}\to\frac{1}{3}$$

oraz

$$c_n = \frac{6n^2 + n^2 \cdot (n^2+1) \cdot (2n^2+1)}{6 \cdot n^6} = \frac{6n^{-4} + (1+n^{-2}) \cdot (2+n^{-2})}{6} \to \frac{1}{3},$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 1/3.