KOLOKWIUM nr 54, 2.12.2016, godz. 8:15–9:00

Zadanie **57.** **(10 punktów)** Dowieść, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n=\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n+2}$$

nie jest (ściśle) rosnący ani (ściśle) malejący.

Rozwiązanie:

Wyliczamy bezpośrednio, że

$$a_1=8^3=2^9$$

oraz

$$a_7=2^9\,,$$

skąd $a_1=a_7$. Wobec tego ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Zadanie **58. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{m^2n^2}{m^3+4n^6+1} : m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy element zbioru jest dodatni, a przyjęcie $m=1$ prowadzi do ciągu $\left(\frac{n^2}{4n^6+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ elementów zbioru, zbieżnego do 0. Zatem kres dolny zbioru jest równy 0.

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $m^3/2$, $m^3/2$ i $4n^6$ otrzymujemy

$$m^2n^2=\sqrt[3]{m^6n^6}\leqslant\frac{m^3+4n^6}{3}<\frac{m^3+4n^6+1}{3},$$

skąd wynika, że wszystkie elementy danego zbioru są mniejsze od 1/3. Przyjmując $m^3/2=4n^6$, czyli $m=2n^2$ otrzymujemy

$$\frac{m^2n^2}{m^3+4n^6+1}=\frac{4n^6}{8n^6+4n^6+1}=\frac{4n^6}{12n^6+1}\to\frac{1}{3}$$

przy $n\to\infty$. Tak więc kres górny zbioru jest równy 1/3.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/3.