KOLOKWIUM nr 55, 16.12.2016, godz. 8:15–9:15

Zadanie **59.** **(10 punktów)** Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>0{,}6\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\,.$$

Dana w treści zadania nierówność będzie spełniona, jeżeli $x\neq y$ oraz

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}>0{,}6\,. \tag{1}$$

Dla uzyskania nierówności (1) wystarczy przyjąć, że x i y są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunki

$$x>0{,}6\cdot\sqrt{x^2+10^8} \tag{2}$$

oraz

$$y>0{,}6\cdot\sqrt{y^2+10^8}\,. \tag{3}$$

Przekształcanie nierówności (2) prowadzi (przy założeniu dodatniości x) do nierówności równoważnych:

$$x^2>0{,}6^2\cdot x^2+0{,}6^2\cdot 10^8\,,$$

$$0{,}64\cdot x^2>0{,}36\cdot 10^8\,,$$

$$x^2>\frac{0{,}36\cdot 10^8}{0{,}64}\,,$$

$$x^2>\frac{36\cdot 10^8}{64}\,,$$

$$x>\frac{6\cdot 10^4}{8}\,,$$

$$x>\frac{3\cdot 10^4}{4}\,,$$

$$x>7500\,.$$

Analogicznie nierówność (3) jest równoważna nierówności $y>7500$.

Dana w treści zadania nierówność jest więc prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y większych od 7500, np. dla $x=7501$ i $y=7502$.

Zadanie **60.** **(15 punktów)**
Liczba wymierna $q>1$ spełnia równość $3^q=q^3$. Udowodnić, że $q=3$.

Możesz dostać **6 punktów** za rozwiązanie częściowe polegające na udowodnieniu jednego z następujących twierdzeń:
- Liczba wymierna $q>1$ spełniająca równość $3^q=q^3$ musi być całkowita.
- Liczba całkowita $q>1$ spełniająca równość $3^q=q^3$ musi być równa 3.

Rozwiązanie:
Niech $q>1$ będzie liczbą wymierną spełniającą równanie
$$3^q=q^3\,. \tag{4}$$
Zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Przekształcanie równania (4) prowadzi kolejno do:
$$3^{m/n}=\left(\frac{m}{n}\right)^3,$$
$$3^m=\left(\frac{m}{n}\right)^{3n},$$
$$3^m\cdot n^{3n}=m^{3n}\,. \tag{5}$$
Gdyby liczba n była większa od 1, miałaby dzielnik pierwszy p. Ponieważ lewa strona równości (5) byłaby podzielna przez p, także prawa strona byłaby podzielna przez p, skąd wynika, że liczba m byłaby podzielna przez p. Ponieważ jednak z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, taka sytuacja nie jest możliwa, co dowodzi, że $n=1$. Otrzymujemy więc równość
$$3^m=m^3\,. \tag{6}$$
Wobec tego liczba m nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą różną od 3, jest więc potęgą trójki o naturalnym wykładniku. Zatem $m=3^k$ dla pewnej liczby naturalnej k i w konsekwencji
$$3^{3^k}=3^{3k},$$
co prowadzi do
$$3^k=3k\,,$$
czyli
$$k=3^{k-1}\,. \tag{7}$$
Ponieważ liczba wyrazów $k-1$-szego wiersza trójkąta Pascala nie przekracza sumy tych wyrazów, mamy
$$k\leqslant 2^{k-1}\,,$$
skąd
$$k\leqslant 2^{k-1}\leqslant 3^{k-1}\,,$$
przy czym ostatnia nierówność jest ostra dla $k\geqslant 2$. Zatem dla $k\geqslant 2$ zachodzi nierówność $k<3^{k-1}$, wobec czego równość (7), a w konsekwencji także równość (6), jest fałszywa dla $k\geqslant 2$, czyli dla $m\neq 3$.

W rezultacie $k=1$ i $m=3$, co daje $q=3$.

Uwaga 1: Istnieje liczba niewymierna $q\approx 2{,}47805268$ spełniająca równanie $3^q=q^3$.

Uwaga 2: Inny, bardziej skomplikowany, sposób wykazania, że q jest liczbą całkowitą:

Ponieważ lewa strona równości (5) jest podzielna przez 3, także prawa strona jest podzielna przez 3, skąd wynika, że liczba m jest podzielna przez 3. Ponieważ z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, liczba n nie jest podzielna przez 3.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że potęgi trójki występujące w rozkładach na czynniki pierwsze liczb po obu stronach równości (5) są równe. Otrzymujemy więc

$$m=3nk\,,$$

gdzie k jest wykładnikiem, z jakim trójka wchodzi do rozkładu liczby m na czynniki pierwsze. Stąd wynika, że liczba n jest dzielnikiem liczby m, a ponieważ jednocześnie liczba n jest względnie pierwsza z m, musi być $n=1$.