KOLOKWIUM nr 56, 5.01.2017, godz. 8:15–9:15

Zadanie **61. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{(n-2)(n+2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n+2}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2)(n+2)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+2) + B(n-2)\,.$$

Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $B=-1/4$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-6}-\frac{1}{N-2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{N-5}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $25/48$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $25/48$.

Zadanie **62. (15 punktów)**

Niech funkcja $f:[0,16]\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x^3}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[0,16]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) (10 punktów) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=6$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $0\leqslant x,y\leqslant 16$ i zakładając $x+y>0$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}\right|=\frac{|x^3-y^3|}{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}\leqslant\frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot\left(x^2+\sqrt{x^2y^2}+y^2\right)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}\leqslant\frac{|x-y|\cdot\left(x^2+\frac{x^2+y^2}{2}+y^2\right)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{|x-y|\cdot(x^2+y^2)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{|x-y|\cdot\left(x\sqrt{x}\sqrt{x}+y\sqrt{y}\sqrt{y}\right)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{|x-y|\cdot\left(x\sqrt{x}\sqrt{16}+y\sqrt{y}\sqrt{16}\right)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}=6\cdot|x-y|\,,$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=6$ i dowolnych $x,y\in[0,16]$.

b) (5 punktów) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=5$.

Rozwiązanie:

Dla $x=16$ oraz $y=9$ mamy $|x-y|=7$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=64-27=37>35=5\cdot 7=C\cdot|x-y|\,,$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x,y\in[0,16]$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=5$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in[0,16]$.