KOLOKWIUM nr 57, 13.01.2017, godz. 8:15–9:15

Zadanie **63. (10 punktów)**

Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^5+x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x)=5x^4+1\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0, \quad g(1)=2 \quad \text{oraz} \quad g(2)=34\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0, \quad f(2)=1 \quad \text{oraz} \quad f(34)=2\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=2$ i $x=34$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{5\cdot 0^4+1}=\frac{1}{1}=1\,,$$

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{5\cdot 1^4+1}=\frac{1}{6}$$

i

$$f'(34)=\frac{1}{g'(f(34))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{5\cdot 2^4+1}=\frac{1}{81}\,.$$

Odpowiedź:

$$f'(0)=1, \quad f'(2)=\frac{1}{6} \quad \text{oraz} \quad f'(34)=\frac{1}{81}\,.$$

Zadanie **64.** **(10 punktów)**

Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(0)=1$ i $f(1)=2$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej x, że $f(x)=f'(x)$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie wynika.

Rozważmy funkcję f określoną wzorem $f(x)=2^x$. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$f'(x)=2^x\cdot\ln 2=f(x)\cdot\ln 2\neq f(x)\,.$$

Zadanie **65.** **(20 punktów)**

Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(0)=1$ i $f(1)=e$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej x, że $f(x)=f'(x)$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wynika.

Rozważmy funkcję g określoną wzorem $g(x)=\ln f(x)$. Wówczas $g(0)=0$ i $g(1)=1$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(0,1)$, że

$$g'(c)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1\,.$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\,,$$

skąd

$$\frac{f'(c)}{f(c)}=1\,,$$

czyli

$$f'(c)=f(c)\,.$$