## KOLOKWIUM nr 58, 20.01.2017, godz. 8:15–10:00

*Zadanie* **66. (10 punktów)**

Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że pochodna funkcji $g$ dana jest wzorem

$$g'(x)=3x^2+9\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0, \quad g(1)=10 \quad \text{oraz} \quad g(4)=100\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0, \quad f(10)=1 \quad \text{oraz} \quad f(100)=4\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=10$ i $x=100$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{3\cdot 0^2+9}=\frac{1}{9}\,,$$

$$f'(10)=\frac{1}{g'(f(10))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3\cdot 1^2+9}=\frac{1}{12}$$

i

$$f'(100)=\frac{1}{g'(f(100))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{3\cdot 4^2+9}=\frac{1}{57}\,.$$

**Odpowiedź:**

$$f'(0)=\frac{1}{9}, \quad f'(10)=\frac{1}{12} \quad \text{oraz} \quad f'(100)=\frac{1}{57}\,.$$

*Zadanie* **67.** **(10 punktów)** Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=2$ i $f(4)=8$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x$, że $f'(x)=\sqrt{f(x)}$.

*Rozwiązanie:*

**Odpowiedź:** Nie wynika.

Rozważmy funkcję $f$ określoną wzorem

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\,.$$

Wówczas $f(2)=2$ i $f(4)=8$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej $x$ zachodzi

$$f'(x)=x=\sqrt{x^2}=\sqrt{2\cdot\frac{x^2}{2}}=\sqrt{2\cdot f(x)}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{f(x)}\neq\sqrt{f(x)}\,.$$

*Zadanie* **68.** **(20 punktów)** Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=1$ i $f(4)=4$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x$, że $f'(x)=\sqrt{f(x)}$.

*Rozwiązanie:*

**Odpowiedź:** Wynika.

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ określoną wzorem $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$. Wówczas $g(2)=2$ i $g(4)=4$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(2,4)$, że

$$g'(c)=\frac{g(4)-g(2)}{4-2}=1\,.$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,,$$

skąd

$$\frac{f'(c)}{\sqrt{f(c)}}=1\,,$$

czyli

$$f'(c)=\sqrt{f(c)}\,.$$

*Zadanie* **69. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

*Rozwiązanie:*

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie $c$ jest pewną liczbą leżącą pomiędzy $x$ i $y$.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$, co dowodzimy następująco:

$$|f'(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\frac{|e^x-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}\leqslant\frac{|e^x|+|-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1\,.$$

*Zadanie* **70.** **(10 punktów)** Udowodnić nierówność

$$26\cdot e^{\operatorname{arctg} 5} < 25\cdot e^{\operatorname{arctg} 7}\,.$$

*Rozwiązanie:*

Dowowdzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie $e$ przyjmuje postać

$$\ln 26 + \operatorname{arctg} 5 < \ln 25 + \operatorname{arctg} 7\,,$$

co można przepisać jako

$$\ln 26 - \ln 25 < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[25,26]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(25,26)$, że

$$\ln 26 - \ln 25 = (26-25)\cdot f'(c) = f'(c)\,.$$

Ponadto z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $g(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziale $[5,7]$ wynika istnienie takiej liczby $d\in(5,7)$, że

$$\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5 = (7-5)\cdot g'(d) = 2\cdot g'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

oraz

$$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $25<c<26$ oraz $5<d<7$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{26} \quad < \quad \ln 26 - \ln 25 = f'(c) = \frac{1}{c} \quad < \quad \frac{1}{25}$$

oraz

$$\frac{1}{25}=\frac{2}{50} \quad < \quad \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5 = 2\cdot g'(d) = \frac{2}{d^2+1} \quad < \quad \frac{2}{26}=\frac{1}{13}\,.$$

W konsekwencji

$$\ln 26 - \ln 25 < \frac{1}{25} < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.