KOLOKWIUM nr 59, 27.01.2017, godz. 8:15–10:00

Zadanie **71. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2} .$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{9n^2+3n-2} = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+2} .$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(3n-1)(3n+2)$ otrzymujemy

$$1 = A(3n+2) + B(3n-1) .$$

Dla $n=1/3$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-2/3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{9n^2+3n-2} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{3N-7} - \frac{1}{3N-4} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3N-4} - \frac{1}{3N-1} \right) + \left(\frac{1}{3N-1} - \frac{1}{3N+2} \right) \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2} \right) ,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/6$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/6$.

Zadanie **72. (30 punktów)**

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 24 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leqslant 3\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant C\,,$$

gdzie $C=12$ **(za 30 punktów)** lub $C=17$ **(za 10 punktów).**

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+a_n+a_n^4}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\right) \leqslant \frac{24+24+3}{3} = \frac{51}{3} = 17$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n\cdot a_n\cdot (8a_n^4)}}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+a_n+8a_n^4}{3\cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 8\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\right) \leqslant \frac{24+24+24}{6} = \frac{72}{6} = 12\,.$$

Zadanie **73. (30 punktów)** Interesują nas funkcje $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x)=(1+x)^{1/x} \quad \text{dla} \quad x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}\,. \tag{$*$}$$

a) (10 punktów) Udowodnić, że istnieje funkcja ciągła f spełniająca warunek $(*)$ i obliczyć $f(0)$ dla tej funkcji f.

Rozwiązanie:
Podstawiając w granicy

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

$t=1/x$, czyli $x=1/t$, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e\,.$$

Ponadto

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right)=e\cdot 1=e\,.$$

Mamy więc

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\,,$$

co po podstawieniu $t=1/x$, czyli $x=1/t$, daje

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x}=e\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\,,$$

co po przyjęciu $f(0)=e$ prowadzi do funkcji ciągłej f.

b) (20 punktów) Dla funkcji ciągłej f spełniającej warunek $(*)$ obliczyć pochodną $f'(0)$ albo wykazać, że f jest nieróżniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dla $x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}$ mamy

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(1+x)^{1/x}=\frac{d}{dx}e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}=e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}\cdot\frac{d}{dx}((1/x)\cdot\ln(1+x))=$$
$$=(1+x)^{1/x}\cdot\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right).$$

Zastosowanie reguły de l'Hospitala do definicji pochodnej funkcji f w zerze daje

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\overset{\text{d'H}}{=}\lim_{h\to0}\frac{f'(h)-0}{1}=\lim_{h\to0}f'(h)=\lim_{x\to0}f'(x),$$

ale można też od razu powołać się na ogólną równość $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ prawdziwą, gdy f jest różniczkowalna wokół zera i ciągła w zerze.

Z pomocą reguły de l'Hospitala wyliczamy

$$f'(0)=\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left((1+x)^{1/x}\cdot\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}\cdot\lim_{x\to0}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2\cdot(x+1)}\overset{\text{d'H}}{=}$$
$$\overset{\text{d'H}}{=}e\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-(1+x)/(1+x)}{3x^2+2x}=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}\overset{\text{d'H}}{=}e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-1/(1+x)}{6x+2}=-\frac{e}{2}.$$

Zadanie **74.** **(100 punktów)**

a) (10 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=3$ i $f(50)=15$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie wynika.

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt{9x/2}\,.$$

Wówczas $f(2)=3$ i $f(50)=15$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi

$$f'(x)=\frac{9/2}{2\cdot\sqrt{9x/2}}=\frac{9/4}{\sqrt{9x/2}}=\frac{9/4}{f(x)}\neq\frac{1}{f(x)}\,.$$

b) (20 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=2$ i $f(50)=10$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wynika.

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ określoną wzorem $g(x)=\dfrac{(f(x))^2}{2}$. Wówczas $g(2)=2$ i $g(50)=50$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(2,50)$, że

$$g'(c)=\frac{g(50)-g(2)}{50-2}=\frac{50-2}{50-2}=1\,.$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=\frac{2\cdot f(x)\cdot f'(x)}{2}=f(x)\cdot f'(x)\,,$$

skąd

$$f(c)\cdot f'(c)=1\,,$$

czyli

$$f'(c)=\frac{1}{f(c)}\,.$$

c) (20 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=10$ i $f(50)=14$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wynika.

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ określoną wzorem $g(x)=\dfrac{(f(x))^2}{2}$. Wówczas $g(2)=50$ i $g(50)=98$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(2,50)$, że

$$g'(c)=\frac{g(50)-g(2)}{50-2}=\frac{98-50}{50-2}=\frac{48}{48}=1\,.$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=\frac{2\cdot f(x)\cdot f'(x)}{2}=f(x)\cdot f'(x)\,,$$

skąd

$$f(c)\cdot f'(c)=1\,,$$

czyli

$$f'(c)=\frac{1}{f(c)}\,.$$

d) (50 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=10{,}005$ i $f(50)=14{,}007$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie wynika.

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=1{,}0005\cdot\sqrt{2x+96}\,.$$

Wówczas $f(2)=10{,}005$ i $f(50)=14{,}007$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi

$$f'(x)=\frac{1{,}0005\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2x+96}}=\frac{1{,}0005}{\sqrt{2x+96}}=\frac{1{,}0005^2}{1{,}0005\cdot\sqrt{2x+96}}=\frac{1{,}0005^2}{f(x)}\neq\frac{1}{f(x)}\,.$$