ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 59, 27.01.2017, godz. 8:15–10:00

Zadanie **71.** **(10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}\,.$$

Zadanie **72.** **(30 punktów)**

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 24 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leqslant 3\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant C\,,$$

gdzie $C=12$ **(za 30 punktów)** lub $C=17$ **(za 10 punktów).**

Zadanie **73.** **(30 punktów)** Interesują nas funkcje $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x)=(1+x)^{1/x} \quad \text{dla} \quad x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}\,. \tag{$*$}$$

a) (10 punktów) Udowodnić, że istnieje funkcja ciągła f spełniająca warunek $(*)$ i obliczyć $f(0)$ dla tej funkcji f.

b) (20 punktów) Dla funkcji ciągłej f spełniającej warunek $(*)$ obliczyć pochodną $f'(0)$ albo wykazać, że f jest nieróżniczkowalna w zerze.

Zadanie **74.** **(100 punktów)**

a) (10 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=3$ i $f(50)=15$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

b) (20 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=2$ i $f(50)=10$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

c) (20 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=10$ i $f(50)=14$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

d) (50 punktów) Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=10{,}005$ i $f(50)=14{,}007$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.